کاربرگ ۱

۱-

۱) خیر
۲) بله $\{۳,۵,۷,۱۱,۱۳\}$
۳) بله $\{\}$
۴) خیر
۵) بله
۶) بله $\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,...\}$

۲-

۱) مجموعه اعداد اول بین ۶۰ و ۱۰۰

۲) مربع اعداد طبیعی بین ۳ و ۱۲ یا مجموعهٔ اعداد طبیعی مربع کامل از ۱۶ تا ۱۲۱

۳) مکعب اعداد طبیعی بین ۲ و ۷ یا مجموعهٔ اعداد طبیعی مکعب کامل از ۲۷ تا ۲۱۶

۴) مجموعه مضارب صحیح عدد ۹ از ۲۷- تا ۳۶

۵) مجموعه مضارب صحیح عدد ۵ که بزرگ‌تر یا مساوی ۱۰- هستند.

۳-

۱) $\{۴,۸,۱۲,۱۶,۲۰,...,۱۴۰۰\} \Rightarrow$ تعداد اعضا $= \frac{۱۴۰۰-۴}{۴}+۱=۳۵۰$

۲) $\{\}$ (عدد طبیعی بین ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ وجود ندارد.) $\Leftarrow$ تعداد اعضا $=۰$

۳) $\{\}$ (بین ۱- و ۱۵ عدد صحیح منفی وجود ندارد همگی نامنفی‌اند.) $\Leftarrow$ تعداد اعضا $=۰$

۴) $\{۵۳\}$ (تنها مضرب اول هر عدد اول، خود آن عدد است. .) $\Leftarrow$ تعداد اعضا $=۱$

۵) باید مجموعهٔ اعداد دو رقمی که مجموع ارقام آن‌ها صفر، ۱، ۲، ۳ یا ۴ است را تشکیل دهیم.

$\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۲۰,۲۱,۲۲,۳۰,۳۱,۴۰\} \Rightarrow$ تعداد اعضا $=۱۰$

۶) همان‌طور که می‌دانیم مربع هر عدد اول، همواره شامل سه شمارندهٔ مثبت است پس مجموعهٔ مـوردنظر برابر است با: $\{۴,۹,۲۵,۴۹\} \Rightarrow$ تعداد اعضا $=۴$

۴- A: مجموعه حروفی که نقطه ندارند.

B: مجموعه اعداد صحیح دو رقمی.

C: مجموعه اعداد صحیحی که مجذورشان از ۲۵ کوچک‌تر است.

D: مجموعه اسامی فصل‌های سال

E: مجموعه اعداد طبیعی دو رقمی که بر ۲ و ۵ بخش‌پذیرند.

۵-

(۱) $\{۴,۸,۱۲,۱۶,...,۴۴\}$ (۲) $\{\}$

(۳) مجموعه اعداد اول مضرب ۵ (۵) $\{۲\}$

۶- با توجه به مفاهیم بیان شده، تعداد اعضای هر مجموعه را می‌شماریم.

۱) سه عضو ۲,۴,۶ اعضای این مجموعه را تشکیل می‌دهند. بنابراین $n(A)=۳$ است. (۲، عضو تکراری این مجموعه است و یک بار شمارش می‌شود.)

۲) $۵,\{۵\},\{\{۵\}\}$ سه عضو متمایز این مجموعه هستند. دقت کنید که $\{۵\}$ و $\{\{۵\}\}$ خود مجموعه‌هایی هستند که عضو این مجموعه‌اند. بنابراین $n(B)=۳$

۳) این مجموعه بیانگر اعداد حاصل از عبارت ۳^n به ازای $n=۰,۱,۲,۳,...$ است. بنابراین تعداد اعضای این مجموعه بی‌شمار بوده و این مجموعه نامتناهی است.

۴) برای پاسخ به این سوال، ابتدا باید بدانید جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، موجب به وجود آمدن مجموعه جدیدی نمی‌شود. به عنوان مثال مجموعه‌های $\{۲,۴\}$ و $\{۴,۲\}$ یکسان هستند و یک مجموعه را مشخص می‌کنند نه دو مجموعه. بنابراین: $D=\{\{۲,۴\},\{۴,۲\}\}$ دارای دو عضو یکسان است. پس $n(D)=۱$ می‌باشد.

۷-

۱) تهی است، تنها عدد اول زوج ۲ می‌باشد.

۲) تهی است. اعداد طبیعی بین ۱۳۹۷ و ۱۳۹۸ وجود ندارد.

۳) تهی نمی‌باشد. بین دو کسر بی‌شمار کسر وجود دارد.

۴) تهی نمی‌باشد. زیرا عدد ۱۱ اول بوده و کمتر از ۱۳ است.

۵) تهی است. هیچ عدد صحیح بزرگ‌تر از ۵ وجود ندارد که کمتر از ۷- باشد.

۸- ۱) مجموعه کسانی‌که به اورانوس سفر کرده‌اند.

مجموعه اعداد طبیعی بین ۵ و ۶

مجموعه اعداد اول زوج دو رقمی

۲) مجموعه اعداد اول زوج

مجموعه اعدادی که نه مثبت هستند و نه منفی

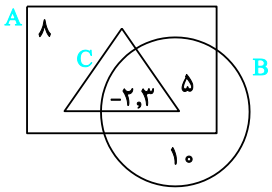
{∅}

۳) مجموعه مضارب یک رقمی عدد ۳

مجموعه اعداد اول فرد یک رقمی

مجموعه ماه‌های فصل بهار

۹- عضوهای مشترک بین ۳ مجموعه ۲- و ۳ می‌باشد و عدد ۵ بین A و B مشترک است.



کاربرگ ۲

۱- ۱) $۷/۵, ۱/۵$ ۲) $۲, \frac{۸}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲۱}, -۴$ ۴) $۹, ۸$

۲- در مجموعهٔ C: $a = ۴, b = ۵$

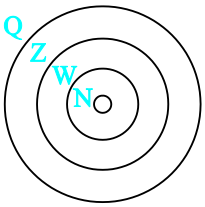
در مجموعهٔ A:

$$\begin{cases} a + ۵ = ۹ \Rightarrow a = ۴ \\ b - ۷ = ۲ \Rightarrow b = ۹ \end{cases}$$

در مجموعهٔ B: $y = ۴, x + y = ۵ \Rightarrow x + ۴ = ۵ \Rightarrow x = ۱$

۳-

۱) درست است. $W \subseteq Q$ $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$



۲) نادرست است. $Q \nsubseteq Z$

۳) نادرست است. $W \nsubseteq N$

۴) نادرست است (چون $Z \subseteq Q$ پس همه اعداد صحیح گویا هستند.)

۵) درست است. $W \subseteq Q$

۶) نادرست است. (همه‌ی اعداد صحیح نامنفی حسابی‌اند.)

۴- مجموعهٔ A چهار عضو دارد. $\{۲\}, ۲, \{\{۲\}\}, \{۱, ۳\}$ بنابراین گزاره‌های ۱، ۳، ۶ درست هستند. همچنین گزاره‌های ۲، ۵، ۷ درست هستند. زیرا اعضای مجموعه‌های $\{۲\}, \{\{۲\}\}, \{۲, \{\{۲\}\}\}$ اعضای A هستند. پس این مجموعه‌ها زیرمجموعهٔ A هستند. گزارهٔ ۴ نادرست است. زیرا $\{۱, ۳\}$ عضو A است. اگر گزاره، ۴ به‌صورت $\{۱, ۳\} \in A$ یا $\{\{۱, ۳\}\} \subset A$ نوشته می‌شد گزاره‌ای درست بود.

۵-

۱) نادرست است. $D \subseteq A$ چون D درون A قرار دارد.

۲) درست است. چون A به‌طور کامل درون C قرار نگرفته پس $A \nsubseteq C$.

۳) نادرست است. D به‌طور کامل در داخل B قرار ندارد پس $D \nsubseteq B$.

۴) درست است. B به‌طور کامل درون C قرار دارد.

۵) درست است. D به‌طور کامل درون C است پس $D \subseteq C$.

۶-

۱) $۲۴ \in B$ ولی $۲۴ \notin A$ پس B نمی‌تواند زیرمجموعهٔ A باشد. در نتیجه این رابطه نادرست است.

۲) $۳۱ \in A$ ولی $۳۱ \notin C$ پس $A \not\subseteq C$ بنابراین رابطه نادرست است.

۳) $۳۵ \in D$ ولی $۳۵ \notin B$ پس $D \not\subseteq B$ بنابراین رابطه درست است.

۴) همهٔ اعضای B عضو مجموعهٔ C هم هستند پس رابطهٔ $B \subseteq C$ درست است.

۵) عدد ۲۳ عضو مجموعهٔ C است. پس رابطهٔ $۲۳ \in C$ درست است.

۶) $\{۲۴,۲۵\}$ عضو مجموعهٔ B نیست پس رابطهٔ $\{۲۴,۲۵\} \in B$ نادرست است و درست آن به‌صورت $\{۲۴,۲۵\} \subseteq B$ است.

۷) هر سه عدد ۲۹,۲۴,۲۳ عضو مجموعهٔ C هستند. درنتیجه رابطهٔ داده شده درست است.

۸) هم ۲۳ و هم ۳۵ عضو مجموعهٔ C هستند. پس مجموعهٔ $\{۲۳,۳۵\}$ زیرمجموعهٔ C است. در نتیجه رابطهٔ داده شده درست است.

۹) D عضو A نیست بلکه زیرمجموعهٔ A است یعنی $D \subseteq A$ پس رابطهٔ داده شده نادرست است.

۷- ۱) شرط $x \in N$ و $۳ < x < ۷$ به اعداد طبیعی بین ۳ و ۷ اشاره می‌کند پس می‌توان نوشت:

$A = \{۴,۵,۶\}$

۲) از شرط $x \in Z$ و $-۲ \le x \le ۱$ نتیجه می‌گیریم $x \in \{-۲,-۱,۰,۱\}$ با جایگذاری اعداد $-۲,-۱,۰,۱$ در عبارت $x^۲$ مجموعهٔ B به‌صورت $B = \{۱,۱,۰,۴\}$ خواهد شد که با حذف عضو تکراری به صورت $B = \{۱,۰,۴\}$ است.

۳) از شرط $x + ۴ = ۳$ نتیجه می‌گیریم $x = -۱$ ولی باید $x \in N$ پس مجموعهٔ C عضوی ندارد یعنی $C = \varnothing$.

۴) از شرط $(x+۱)(x-۲)(x-۱) = ۰$ نتیجه می‌گیریم $x = -۱$ ، $x = ۲$ یا $x = ۱$ چون باید $x \in N$ داریم: $D = \{۱,۲\}$

۸-

۱) ویژگی مشترک اعضای A این است که همگی زوج هستند. عضو اول A، ۱×۲ است. عضو دوم A، ۲×۲ است و ... بنابراین مجموعهٔ A را به صورت زیر می‌توان توصیف کرد:

$$A=\{۲k \mid k\in N, k\le ۴\}$$

۲) می‌دانیم $B=\{۳,۶,۹,...\}$ پس اعضای B به صورت $۳\times۱, ۳\times۲, ۳\times۳$ و ... هستند. بنابراین مجموعهٔ B را به‌صورت مقابل می‌توان توصیف کرد: $B=\{۳k \mid k\in N\}$

۳) اگر در تقسیم عدد طبیعی x بر ۵، خارج‌قسمت k و باقی‌مانده ۲ باشد، آن‌گاه $x=۵k+۲$ (به این تساوی «امتحان تقسیم» می‌گفتید) به صورت زیر می‌توانیم اعضای مجموعهٔ C را بنویسیم:

$۵\times۰+۲=۲ \Rightarrow$ عضو اول

$۵\times۱+۲=۷ \Rightarrow$ عضو دوم

$۵\times۲+۲=۱۲,... \Rightarrow$ عضو سوم

پس مجموعهٔ C به‌صورت $C=\{۲,۷,۱۲,۱۷,...\}$ است و می‌توان آن را به صورت $C=\{۵k+۲ \mid k\in Z, k\ge ۰\}$ نوشت.

۹- الف) $A=\{۵,۷,۹\}$، مجموعهٔ A دارای سه عضو است.

ب) $B=\{۵,۷\}$

ج) $\varnothing, \{۵\}, \{۷\}, \{۹\}, \{۵,۷\}, \{۵,۹\}, \{۷,۹\}, \{۵,۷,۹\}$ مجموعهٔ ۳ عضوی دارای ۸ زیرمجموعه است.

در واقع n عضوی دارای ۲^n زیر مجموعه است.

۱۰- ۱) توجه کنید که در مجموعهٔ C همهٔ اعضا مربع کامل هستند.

عضو اول $=۱^۲$ عضو دوم $=۲^۲$ عضو سوم $=۳^۲$ عضو چهارم $=۴^۲$

بنابراین مجموعهٔ C را به‌صورت مقابل می‌توان توصیف کرد: $C=\{n^۲ \mid n\in N\}$

۲) همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در اعضای مجموعهٔ D در مخرج هر کسر یک عدد مکعب کامل داریم:

یعنی:

عضو اول $\Rightarrow \frac{۱}{۱^۳}$، عضو دوم $\Rightarrow \frac{۱}{۲^۳}$، عضو سوم $\Rightarrow \frac{۱}{۳^۳},...$

پس هر عضو این مجموعه به شکل $\frac{۱}{n^۳}$ است بنابراین مجموعهٔ D را به‌صورت زیر می‌توان توصیف کرد:

$$D=\{\frac{۱}{n^۳}\mid n\in N\}.$$

۳) اعضای مجموعهٔ E به‌صورت زیر هستند:

$$۲^۳-۱,\ldots \Rightarrow \text{عضو چهارم} \quad ، \quad ۲^۲-۱ \Rightarrow \text{عضو سوم} \quad ، \quad ۲^۱-۱ \Rightarrow \text{عضو دوم} \quad ، \quad ۲^۰-۱ \Rightarrow \text{عضو اول}$$

پس توصیف مجموعهٔ E به‌صورت $E=\{۲^n-۱\mid n\in W\}$ یا $E=\{۲^{n-۱}-۱\mid n\in N\}$ است.

۴) همان‌طور که ملاحظه می‌کنید صورت کسرها اعداد ۱، ۳، ۹ و ... هستند که توان‌های عدد ۳ هستند. مخرج کسرها نیز اعداد ۷، ۱۱، ۱۵ و ... هستند که هر کدام با اضافه شدن ۴ واحد به عدد قبلی به دست می‌آیند و همگی به شکل $۴n+۳$ قابل نوشتن هستند. بنابراین:

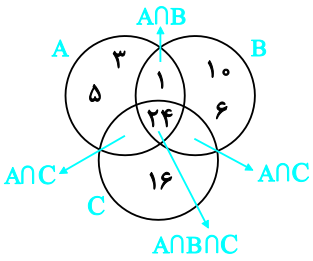
$$\text{عضو اول} \Rightarrow \frac{۳^۰}{۴\times ۱+۳} \qquad \text{عضو دوم} \Rightarrow \frac{۳^۱}{۴\times ۲+۳} \qquad \text{عضو سوم} \Rightarrow \frac{۳^۲}{۴\times ۳+۳}$$

پس هر عضو این مجموعه به شکل $\frac{۳^{n-۱}}{۴n+۳}$ قابل نوشتن است. بنابراین مجموعهٔ F را به‌صورت زیر می‌توان توصیف کرد:

$$F=\{\frac{۳^{n-۱}}{۴n+۳}\mid n\in N\}$$

کاربرگ ۳

۱- $A\cap B\cap C$ شامل همه عضوهایی است که هم در A، هم در B و هم در C هستند. با توجه به این سه مجموعه، مجموعهٔ $\{۲,۴\}$ این خصوصیت را دارد. همان‌طور که در نمودار ون شکل زیر مشاهده می‌کنید ۲ و ۴ را در ناحیهٔ مشترک سه مجموعهٔ A ، B و C قرار می‌دهیم. برای قرار دادن سایر اعضا در این نمودار به اشتراک دوبه‌دوی مجموعه‌ها دقت می‌کنیم. مثلاً عدد ۱ هم در مجموعهٔ A قرار دارد و هم در مجموعهٔ B ولی عضو مجموعهٔ C نیست. بنابراین آن را در محدودهٔ اشتراک دو مجموعهٔ A و B که شامل مجموعهٔ C نمی‌شود قرار می‌دهیم. در نهایت برای تکمیل نمودار ون اعدادی را که فقط عضو یک مجموعه هستند در قسمت غیرمشترک مجموعه‌ها قرار می‌دهیم.



۲- $A\cap B$ به معنی نقاط مشترک بین خط و دایره است. خط و دایره سه وضعیت نسبت به هم می‌توانند داشته باشند در شکل زیر این سه وضعیت را نشان داده‌ایم. در شکل (۱) داریم: $A\cap B=\varnothing$. در شکل (۲) مجموعهٔ $A\cap B$ فقط یک عضو دارد زیرا خط و دایره بر هم مماس هستند و یک نقطهٔ مشترک دارند. به همین ترتیب در شکل شمارهٔ (۳) مجموعهٔ $A\cap B$ دو عضو دارد.

۳-

$A=\{۲,-۱\}$ $B=\{۱,۲,۳\}$ $A-B=\{-۱\}$

$B-A=\{۱,۳\}$ $A\cap B=\{۲\}$ $A\cup B=\{-۱,۱,۲,۳\}$

۴-

$A=\{-۳,-۱,۱,۳,۵\}$

$B=\{-۱,۱,۳\}$

$B\subseteq A\Rightarrow A\cap B=B\Rightarrow A\cap B=\{-۱,۱,۳\}$

$B\subseteq A\Rightarrow A\cup B=A\Rightarrow A\cup B=\{-۳,-۱,۱,۳,۵\}$

۵- با توجه به مفاهیم بیان شده به محاسبهٔ هر یک از عبارت‌های داده شده می پردازیم. فقط باید به این نکته توجه داشته باشید که مانند محاسبات مربوط به عبارت‌های جبری اولویت انجام عملیات با عبارت داخل پرانتز است.

۱) $A\cup B=\{۴,۶,۷,۸,۹,۱۰\}\Rightarrow(A\cup B)\cap C=\{۴,۷,۹\}$

۲) $A-C=\{۸,۱۰\},B\cap C=\{۴\}\Rightarrow(A-C)\cup(B\cap C)=\{۴,۸,۱۰\}$

۳) $B\cap C=\{۴\}\Rightarrow A\cup(B\cap C)=\{۴,۷,۸,۹,۱۰\}$

۶- ۱) مجموعه‌های X و Y را تعیین کرده و سپس مجموعه‌های دیگر را به دست می‌آوریم:

$X=\{۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\}$ $Y=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲,۱۸,۳۶\}$

$X\cap Y=\{۱,۲,۳,۶\}$

$X\cup Y=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۹,۱۰,۱۲,۱۵,۱۸,۳۰,۳۶\}$

$X-Y=\{۵,۱۰,۱۵,۳۰\}$

$Y-X=\{۴,۹,۱۲,۱۸,۳۶\}$

۲) با توجه به مجموعه‌ها داریم:

الف) نادرست است چون مثلاً $۳۰\in X$ اما $۳۰\notin Y$.

ب) نادرست است. چون مثلاً $۳۶\in Y$ اما $۳۶\notin X$.

ج) درست است. تمام عضوهای $X-Y$ حتماً در X هستند پس $X-Y\subseteq X$.

۷- ۱) $A\cap B$ قسمت مشترک بین A و B است. پس داریم:

$A\cap B=\{۶,۷,۱۱,۱۷\}$

۲) $A\cap B\cap C$ قسمت مشترک بین A، B و C است. پس داریم:

$A\cap B\cap C=\{۶,۷,۱۷\}$

۳) عضوهایی که در B هستند ولی در C نیستند:

$B-C=\{۱۰,۱۱,۱۳,۲۰,۲۱\}\Rightarrow A\cap(B-C)=\{۱۱\}$

$\{۱۱\}=$ عضوهایی که در A و B هستند ولی در C نیستند.

۴) $(A\cap C)-B$ یعنی عضوهایی که در A و C هستند ولی در B نیستند. پس داریم:

$(A\cap C)-B=\{۸\}$

۵) $A-B$ یعنی عضوهایی که در A هستند ولی در B نیستند:

$A-B=\{۲,۸,۱۲,۱۸,۲۳\}$

$A-C$ یعنی عضوهایی که در A هستند ولی در C نیستند:

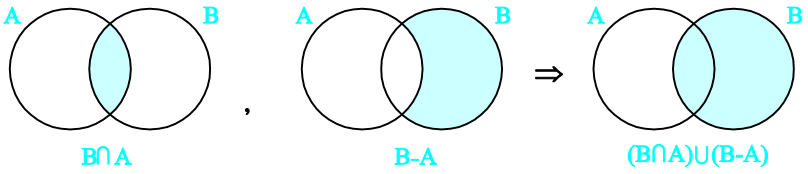
$A-C=\{۲,۱۱,۱۲,۲۳,۱۸\}$

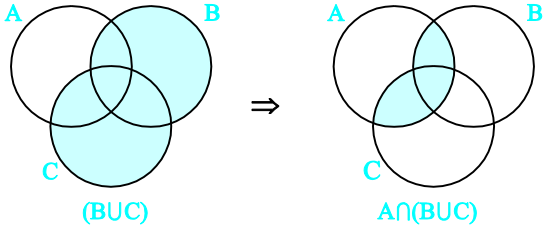
حالا اشتراک عضوهایی که در A هستند ولی در B و C نیستند برابر است با: $\{۲,۱۲,۱۸,۲۳\}$

۶) $B \cup C = \{۳,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۹,۲۰,۲۱,۲۲\}$

$A \cap B = \{۶,۷,۱۱,۱۷\} \Rightarrow (B \cup C) - (A \cap B) = \{۳,۵,۸,۹,۱۰,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۹,۲۰,۲۱,۲۲\}$

۸-





عضوهایی که یا در A و B هستند یا در A و C : $A \cap (B \cup C)$

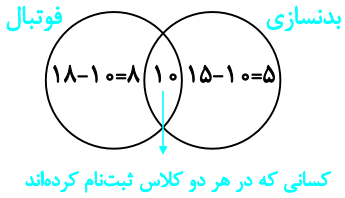
۹- ۱) W مجموعه اعداد حسابی و N مجموعه اعداد طبیعی است و چون $N \subseteq W$ پس $W \cap N = N$.

۲) Z مجموعه اعداد صحیح است پس چون $W \subseteq Z$، بنابراین $Z \cap W = W$ پس داریم:

$(Z \cap W) - N = W - N \Rightarrow \{۰,۱,۲,۳,...\} - \{۱,۲,۳,...\} = \{۰\}$

۳) $Q - Z$ مجموعه اعداد گویای ناصحیح است اما اعضای W همگی صحیح هستند. پس این دو مجموعه با هم هیچ اشتراکی ندارند. در نتیجه: $(Q - Z) \cap W = \varnothing$

۱۰-



حداقل در یک کلاس نام‌نویسی کرده‌اند. $۸ + ۱۰ + ۵ = ۲۳$

کاربرگ ۴

۱-

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\} \Rightarrow P=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

۲-

۱) $\frac{۸}{۱۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۵}=\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲}{۱۵}$

۳- ۱)

$$A=\{(پ، پ، پ) (پ، پ، د) (پ، د، پ) (د، پ، پ) (د، د، پ) (د، پ، د) (پ، د، د) (د،د،د)\}$$

$$\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

۲) $\frac{۱۳}{۱۷}=\frac{۱۳}{۶+۴+۷}$

۴- تعداد کل حالت‌های رو شدن عدد یک تاس برابر با تعداد اعضای مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ یعنی ۶ تا است. پس داریم:

۱) در این صورت حالت‌های مطلوب حالت‌هایی هستند که عدد تاس برابر ۴ یا ۶ باشد پس احتمال موردنظر برابر $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}$ است.

۲) در بین اعداد ۱ تا ۶ تنها عددی که شامل حداقل چهار شمارندهٔ مثبت است عدد ۶ است پس احتمال موردنظر برابر $\frac{۱}{۶}$ است.

۳) در بین اعداد ۱ تا ۶ تنها عددی که نه اول است نه مرکب عدد ۱ است. پس احتمال موردنظر برابر $\frac{۱}{۶}$ است.

۴) می‌دانیم $\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$ پس کافیست پیشامدی ۴ عضوی مثال بزنیم مثلاً پیشامد این‌که عدد رو شده بین ۱ و ۶ باشد.

۵- تعداد کل حالت‌های رو شدن تاس‌ها برابر ۳۶ تا است. پس داریم:

۱) اگر عدد تاس اول برابر ۱ باشد؛ آن‌گاه عدد تاس دوم می‌تواند از ۱ تا ۶ تغییر کند. اگر عدد تاس اول برابر ۲ باشد، آنگاه عدد تاس دوم می‌تواند برابر ۲، ۴ یا ۶ باشد. اگر عدد تاس سوم برابر ۳ باشد عدد تاس دوم می‌تواند برابر هر یک از مقادیر ۳ یا ۶ باشد. در حالت‌هایی که عدد تاس اول برابر ۴، ۵ یا ۶ هست هم اعداد روش شده در تاس دوم به ترتیب فقط می‌توانند برای مقادیر ۴، ۵ و ۶ باشند پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر ۱۶تا است و در نتیجه احتمال موردنظر برابر $\frac{۱۴}{۳۶}=\frac{۷}{۱۸}$ است.

۲) مجموع اعداد تاس‌ها می‌تواند برابر هر یک از مقادیر ۲، ۳ یا ۴ باشد پس حالت‌های مطلوب عبارتند از:

(عدد تاس دوم ، عدد تاس اول) : $(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۱,۳),(۳,۱),(۲,۲)$

که تعداد آن‌ها نیز برابر ۶ تا است. پس احتمال مورنظر برابر $\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$ می‌باشد.

۳) حالت‌های مطلوب عبارتند از:

تفاضل ۱ : $(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)$

تفاضل ۲ : $(۲,۴),(۴,۲),(۱,۳),(۳,۱),(۳,۵),(۵,۳),(۴,۶),(۶,۴)$

که تعداد آن‌ها نیز برابر ۱۸ تاست. پس احتمال موردنظر برابر $\frac{۱۸}{۳۶}=\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

۴) اعداد رو شده هر دو باید بزرگ‌تر یا مساوی ۴ باشند. پس حالت‌های مطلوب عبارتند از:

$(۴,۴),(۴,۵),(۵,۴),(۴,۶),(۶,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)$

که تعداد آن‌ها نیز برابر ۹ تا است. پس احتمال موردنظر برابر $\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$ می‌باشد.

۶- کل حالت‌های فرزندان این خانواده عبارت‌اند از: (پ: پسر، د: دختر)

{ (د، د،د) (پ،د،د) (د، پ، د) (د، د، پ) (پ، پ، د) (پ، د، پ)، (د، پ، پ)، (پ، پ، پ) }

پس تعداد کل حالت‌ها برابر ۸تا است. در نتیجه داریم:

۱) در این صورت حالت‌های (د، پ، د)س و (پ، د، پ) حالت‌های مطلوب ما هستند. پس احتمال موردنظر برابر $\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$ است.

۲) در این صورت همهٔ حالت‌ها به جز حالت‌های (د، د، د) و (پ، پ، پ) مطلوب ما هستند. پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر $۸-۲=۶$ و احتمال موردنظر برابر $\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$ است.

۳) در این صورت حالت‌های (د، د، پ) و (پ، د، پ) و (د، پ، پ) و (پ، پ، پ) حالت‌های مطلوب ما هستند پس احتمال موردنظر $\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$ است.

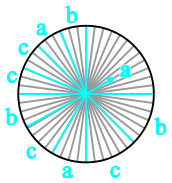
۷-

۱) $A=\{۴,۵,۶,۷,۸,۹\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$

۲) چون $\frac{۴}{۲۰}=\frac{۱}{۵}=\frac{۲۰}{۱۰۰}$ پس پیشامدهایی که احتمال وقوع آن‌ها برابر ۲۰٪ است پیشامدهایی هستند که شامل ۴ عضوند مثلاً پیشامدهای $\{۱۴,۱۵,۱۶,۱۷\}$ و $\{۱۶,۱۷,۱۸,۱۹\}$ که به ترتیب عبارتند از: انتخاب کارتی با شماره‌های بین عددهای ۱۸ و ۱۳، انتخاب کارتی که شمارهٔ آن کم‌تر از ۲۰ و بیش‌تر از ۱۵ است.

۸- دایره به چهار قسمت مساوی تقسیم شده که یک بخش آن به ۴ بخش مساوی کوچک‌تر، یک بخش به سه بخش مساوی کوچک‌تر و بخش دیگر نیز به دو بخش مساوی کوچک‌تر تقسیم شده است. پس هر کدام از این چهار بخش را می‌توان به $۱۲=[۲,۳,۴]$ بخش کاملاً مساوی تقسیم نمود. حالا توجه کنید که از این ۴۸ بخش تعداد ۱۹ بخش متعلق به a ، ۱۳ بخش متعلق به b و ۱۶ بخش هم متعلق به c است. پس داریم:

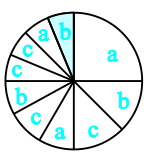
۱) احتمال اینکه عقربه روی a بایستد. $=\frac{۱۹}{۴۸}$



احتمال این که عقربه روی b بایستد. $=\frac{۱۳}{۴۸}$

احتمال این‌که عقربه روی c بایستد. $=\frac{۱۶}{۴۸}=\frac{۱}{۳}$

۲) با توجه به شکل زیر احتمال این‌که عقربه روی قسمت سفید قرار بگیرد برابر $۱-\frac{۳}{۴۸}=\frac{۹۷۳}{۱۰۰۰}=٪۹۳/۷۵$ است.



کاربرگ ۵

۱- ۱) کافی است اعداد $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۲}$ را در نظر بگیریم: $\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۲}=۱$

۲) کافی است اعداد $\frac{۴}{۳}$ و $\frac{۱}{۳}$ را در نظر بگیریم: $\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{۳}=۱$

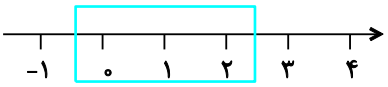
۳) کافی است اعداد $\frac{۱}{۷},\frac{۲}{۷},\frac{۴}{۷}$ را در نظر بگیریم: $\frac{۱}{۷}+\frac{۲}{۷}+\frac{۴}{۷}=\frac{۷}{۷}=۱$

۲-

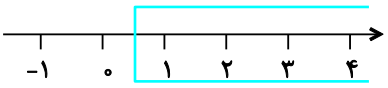
۱) $\{x\in Z\,|\,x\le ۲\}$ ۲) $\{x\in Z\,|\,x\ge ۰\}$

۳) $\{x\in Z\,|\,-۳\le x\le ۳\}$ ۴) $\{x\in Z\,|\,-۶\le x\le -۴\}$

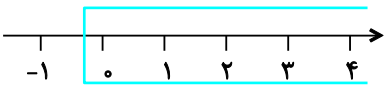
۳- ۱) مجموعه اعداد صحیح بین ۱- و ۳



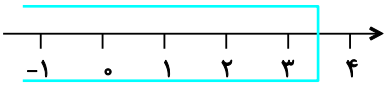
۲) مجموعه اعداد طبیعی



۳) مجموعه اعداد حسابی کوچک‌تر از ۵



۴) مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۴



۴- ۱) صورت و مخرج کسرهای داده شده را در ۶ ضرب می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\frac{۳}{۱۷}=\frac{۳\times۶}{۱۷\times۶}=\frac{۱۸}{۱۰۲}\ ,\ \frac{۴}{۱۷}=\frac{۴\times۶}{۱۷\times۶}=\frac{۲۴}{۱۰۲}$$

پنج کسر موردنظر عبارت‌اند از: $\frac{۱۹}{۱۰۲},\frac{۲۰}{۱۰۲},\frac{۲۱}{۱۰۲},\frac{۲۲}{۱۰۲},\frac{۲۳}{۱۰۲}$

۲) ابتدا دو کسر داده شده را هم‌مخرج می‌کنیم:

$$\frac{۱\times۴}{۳\times۴}=\frac{۴}{۱۲}\ ,\ \frac{۳\times۴}{۴\times۴}=\frac{۹}{۱۲}$$

پس سه کسر موردنظر عبارت‌اند از: $\frac{۶}{۱۲},\frac{۷}{۱۲},\frac{۸}{۱۲}$

۵- ۱) ابتدا میانگین دو کسر داده شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{\frac{۱+۲}{۴}}{۲}=\frac{\frac{۳}{۴}}{۲}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow\frac{۱}{۴}<\frac{۳}{۸}<\frac{۱}{۲}$$

حالا برای یافتن دو کسر دیگرکافیست میانگین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۸}$ و هم‌چنین $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۳}{۸}$ را حساب کنیم. در این صورت سه کسر موردنظر را یافته‌ایم. پس داریم:

$$\begin{cases}\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۸}}{۲}=\frac{\frac{۴+۳}{۸}}{۲}=\frac{\frac{۷}{۸}}{۲}=\frac{۷}{۱۶}\\ \frac{\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۸}}{۲}=\frac{\frac{۲+۳}{۸}}{۲}=\frac{\frac{۵}{۸}}{۲}=\frac{۵}{۱۶}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{۴}<\frac{۵}{۱۶}<\frac{۳}{۸}<\frac{۷}{۱۶}<\frac{۱}{۲}$$

۲)

$$\frac{\frac{-۳}{۷}+\frac{-۲}{۷}}{۲}=\frac{\frac{-۵}{۷}}{۲}=\frac{-۵}{۱۴}\Rightarrow\frac{-۳}{۷}<\frac{-۵}{۱۴}<\frac{-۲}{۷}$$

$$\begin{cases}\frac{\frac{-۲}{۷}+\frac{-۵}{۱۴}}{۲}=\frac{\frac{-۴-۵}{۱۴}}{۲}=\frac{\frac{-۹}{۱۴}}{۲}=\frac{-۹}{۲۸}\\ \frac{\frac{-۳}{۷}+\frac{-۵}{۱۴}}{۲}=\frac{\frac{-۶-۵}{۱۴}}{۲}=\frac{\frac{-۱۱}{۱۴}}{۲}=\frac{-۱۱}{۲۸}\end{cases}\Rightarrow\frac{-۳}{۷}<\frac{-۱۱}{۲۸}<\frac{-۵}{۱۴}<\frac{-۹}{۲۸}<\frac{-۲}{۷}$$

۶- ابتدا کسرهای مثبت را با هم مقایسه می‌کنیم. برای این کار کسرها را هم‌مخرج می‌کنیم.

$$\frac{۳}{۸},\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{۸},\frac{۳}{۲}=\frac{۳\times۴}{۲\times۴}=\frac{۱۲}{۸}\Rightarrow\frac{۲}{۸}<\frac{۳}{۸}<\frac{۱۲}{۸}\Rightarrow\frac{۱}{۴}<\frac{۳}{۸}<\frac{۳}{۲}$$

در بین کسرهای منفی هم که واضح است $-۴\frac{۱}{۳}$ از $-\frac{۷}{۶}$ کمتر است. چون $-۴\frac{۱}{۳}=-\frac{۱۳}{۳}=\frac{-۲۶}{۶}$ بنابراین مقایسهٔ کل کسرها به صورت زیر خواهد بود.

$$-۴\frac{۱}{۳}<\frac{-۷}{۶}<\frac{۱}{۴}<\frac{۳}{۸}<\frac{۳}{۲}$$

۲) ابتدا کسرهای مثبت را به صورت اعداد مرکب نوشته و با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{۳۹}{۱۴}=\frac{۲۸+۱۱}{۱۴}=\frac{۲۸}{۱۴}+\frac{۱۱}{۱۴}=۲+\frac{۱۱}{۱۴}=۲\frac{۱۱}{۱۴} \\ ۳/۲۵=۳+۰/۲۵=۳+\frac{۱}{۴}=۳\frac{۱}{۴} \\ \frac{۴۴}{۱۰}=\frac{۴۰+۴}{۱۰}=\frac{۴۰}{۱۰}+\frac{۴}{۱۰}=۴+\frac{۲}{۵}=۴\frac{۲}{۵} \\ \frac{۵۶}{۱۳}=\frac{۵۲+۴}{۱۳}=\frac{۵۲}{۱۳}+\frac{۴}{۱۳}=۴+\frac{۴}{۱۳}=۴\frac{۴}{۱۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲\frac{۱۱}{۱۴}<۳\frac{۱}{۴}<۴\frac{۴}{۱۳}<۴\frac{۲}{۵}\Rightarrow \frac{۳۹}{۱۴}<۳/۲۵<\frac{۵۶}{۱۳}<\frac{۴۴}{۱۰}$$

حالا چون $۳<۴$ پس $\frac{۱}{۳}>\frac{۱}{۴}$ و در نتیجه $-\frac{۱}{۳}<-\frac{۱}{۴}$ بنابراین مقایسهٔ کلی کسرها به صورت زیـر خواهـد بود:

$$-\frac{۱}{۳}<-\frac{۱}{۴}<\frac{۳۹}{۱۴}<۳/۲۵<\frac{۵۶}{۱۳}<\frac{۴۴}{۱۰}$$

۷-

۱) $\frac{۱۰}{۶۴}=\frac{۵}{۳۲}\Rightarrow ۳۲=۲^{۵}\Rightarrow$ ، عدد گویای مختوم است. $\frac{۱۰}{۶۴}$

۲) $\frac{۱۴}{۳۰}=\frac{۷}{۱۵}\Rightarrow ۱۵=۵\times ۳\Rightarrow$ عدد گویای متناوب است. $\frac{۱۴}{۳۰}$

۳) $\frac{۱۴}{۳۱}\Rightarrow ۳۱=۳۱\Rightarrow$ عدد گویای متناوب است. $\frac{۱۴}{۳۱}$

۸- عددهای داده شده به صورت زیر قابل نوشتن هستند.

$$۱)\ \begin{matrix} ۴/۷=۴/۷۰۰۰۰۰... \\ ۴/\overline{۷}=۴/۷۷۷۷... \\ ۴/\overline{۰۷}=۴/۰۷۰۷۰۷... \end{matrix}\Rightarrow ۴/\overline{۰۷}<۴/۷<۴/\overline{۷}$$

۲) مشابه قسمت (۱) قسمت اعشاری عددهای داده شده را نوشته و با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{matrix} ۲/\overline{۱۲}=۲/۱۲۱۲۱۲... \\ ۲/\overline{۱۲۳}=۲/۱۲۳۲۳... \\ ۲/\overline{۱۲۳}=۲/۱۲۳۱۲۳... \end{matrix}\Rightarrow ۲/\overline{۱۲}<۲/\overline{۱۲۳}<۲/\overline{۱۲۳}$$

۹- ۱) مخرج مشترک این دو کسر عدد ۱۵ است پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۴}{۳}+\frac{۲}{۵} \xrightarrow[\text{م.م}=۱۵]{} \frac{۴}{۳}+\frac{۲}{۵}=\frac{۲۰}{۱۵}+\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲۶}{۱۵}$$

۲) ابتدا عبارت داخل پرانتز را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۳}{۵}-\frac{۵}{۶} \xrightarrow[\text{م.م}=۳۰]{} \frac{۳}{۵}-\frac{۵}{۶}=\frac{۱۸}{۳۰}-\frac{۲۵}{۳۰}=-\frac{۷}{۳۰}$$

در نتیجه مسئله به محاسبهٔ حاصل‌ضرب $\frac{-۷}{۳۰}\times\frac{۲}{۹}$ تبدیل می‌شود که برابر با $\frac{-۷}{۱۳۵}$ می‌باشد.

۳) ابتدا حاصل هر یک از پرانتزها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸} \xrightarrow[\text{م.م}=۲۴]{} \frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}=\frac{۴}{۲۴}+\frac{۳}{۲۴}=\frac{۷}{۲۴}$$

$$\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸} \xrightarrow[\text{م.م}=۲۴]{} \frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸}=\frac{۴}{۲۴}-\frac{۳}{۲۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

بنابراین مسئله به محاسبهٔ حاصل تقسیم $(\frac{۱}{۲۴})\div(\frac{۷}{۲۴})$ تبدیل می‌شود که برابر است با:

$$\frac{۷}{۲۴}\div\frac{۱}{۲۴}=\frac{۷}{۲۴}\times\frac{۲۴}{۱}=\frac{۷}{۱}=۷$$

۱۰-

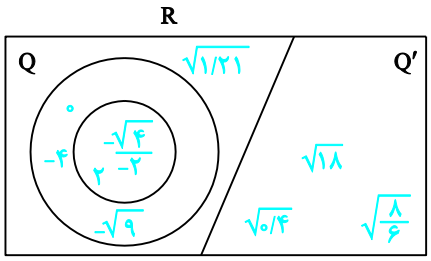
$$۱)\ \frac{۱}{۱+\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۱}{۱+\frac{۲}{۳}}=\frac{۱}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۳}{۵}$$

$$۲)\ \frac{۳-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۳}\div۲}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۱}{۶}}=\frac{۶\times۵}{۱\times۲}=۱۵\ ,\ \frac{۱-\frac{۱}{۲}}{۳\times\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۱۵-\frac{۱}{۳}=۱۴\frac{۲}{۳}$$

$$۳)\ \frac{\frac{۱}{۳}-۲}{۲+\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{-۵}{۳}}{\frac{۷}{۳}}=-\frac{۵}{۷}\ ,\ \frac{۲\times\frac{۱}{۳}}{۲\div\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۶}{۱}}=\frac{۲}{۱۸}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow\frac{-۵}{۷}\times\frac{۹}{۱}=\frac{-۴۵}{۷}$$

کاربرگ ۶

۱-



۲- با توجه به نمودار ون مربوط به اعداد حقیقی، به بررسی هر یک از روابط می‌پردازیم:

۱) درست است؛ زیرا اگر از مجموعهٔ اعداد حقیقی، مجموعهٔ اعداد گنگ را کم کنیم، مجموعه اعداد گویا باقی می‌ماند.

۲) درست است، زیرا $R \cap Z = Z$ است و $Z \subseteq Q$

۳) نادرست است، زیرا $Q' \subseteq R$ است بنابراین $Q' \cap R = Q'$ می‌شود.

۴) نادرست است، زیرا $Q \subseteq R$ است بنابراین $Q \cup R = R$ می‌شود.

۳- ۱) خیر، ۰ گویاست و $\sqrt{۲} + (-\sqrt{۲}) = ۰$

۲) خیر، ۲ گویاست و $\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۴} = ۲$

۳) خیر، ۰ گویاست و $۰ \times \sqrt{۲} = ۰$

۴) بله

۵) بله، $(\sqrt{۲} + \frac{۱}{۲}) - \sqrt{۲} = \frac{۱}{۲}$

۶) خیر، چون بین هر عدد گنگ و گویا حتماً یک عدد گویا پیدا می‌شود.

۴- ۱) فرض کنید طول مستطیل $\sqrt{۸}$ و عرض آن $\sqrt{۲}$ باشد، آنگاه محیط مستطیل $۲\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲}$ ۴ می‌باشد که عدد گنگ است و مساحت آن $\sqrt{۲} \times \sqrt{۸} = \sqrt{۱۶} = ۴$ می‌باشد که عددی گویا است.

۲) فرض کنید طول مستطیل $\sqrt{۲} + ۳$ و عرض آن $\sqrt{۲} - ۲$ باشد. در این صورت داریم:

$$\text{محیط مستطیل} = ۲(۳ + \sqrt{۲}) + ۲(۲ - \sqrt{۲}) = ۶ + ۲\sqrt{۲} + ۴ - ۲\sqrt{۲} = ۶ + ۴ = ۱۰$$

$$\text{مساحت مستطیل} = (۳ + \sqrt{۲}) \times (۲ - \sqrt{۲}) = ۶ - ۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} - ۲ = ۴ - \sqrt{۲}$$

در نتیجه محیط مستطیل عددی گویا و مساحت آن، عددی گنگ است.

۳) فرض کنید طول مستطیل $۲+\sqrt{۲}$ و عرض آن $۲-\sqrt{۲}$ باشد. در این صورت داریم:

$$\text{محیط مستطیل} = ۲(۲+\sqrt{۲})+۲(۲-\sqrt{۲}) = ۴+۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۲} = ۸$$

$$\text{مساحت مستطیل} = (۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲}) = ۴+۲\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}-۲ = ۲$$

در نتیجه محیط مستطیل عددی گویا و مساحت آن نیز عددی گویا است.

۵- ۱) بی‌شمار

۲) خیر، چون در بین دو عدد ۲/۵ و ۳ بی‌شمار عدد گنگ نیز وجود دارد.

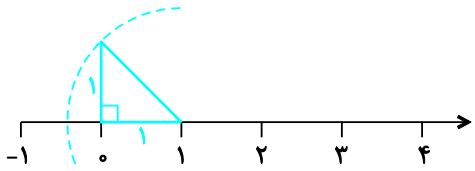
۶-

مجموعه اعداد	$-\frac{۹}{۱۱}$	۴	$-\frac{۸}{۴}$	$\pi+۲$	۰/۱۷۸۴	$۳/\overline{۲}$	$\sqrt{۱۸}$
N طبیعی		✓					
W حسابی		✓					
Z صحیح		✓	✓				
Q گویا	✓	✓	✓		✓	✓	
Q′ گنگ				✓			✓
R حقیقی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

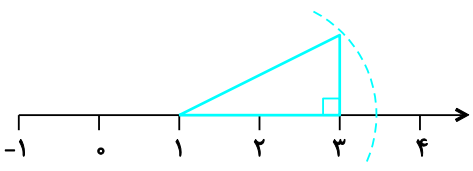
۷-

۱) $۲+\sqrt{۳}$ ۲) $۲-\sqrt{۵}$

۸-

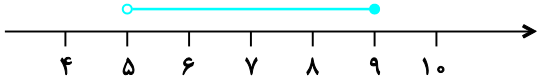


(۱)



(۲)

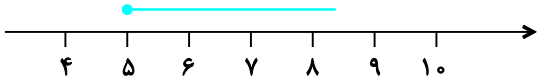
۹- ۱) با توجه به مجموعهٔ $A=\{x\in R, ۵<x\leq ۱۹\}$ داریم:



۲) از آن‌جا که محور اعداد در این قسمت کل اعداد بین ۶ تا ۱۰ و خود این دو عدد را نشان می‌دهد؛ داریم:

$$B=\{x\in R\,|\,۶\le x\le ۱۰\}$$

۳) با توجه به این‌که مجموعهٔ C ، کل اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۵ را شامل می‌شود نمایش آن به وسیلهٔ محور اعداد به صورت زیر است:



۴) محور اعداد در این قسمت، مجموعهٔ کل اعداد کوچک‌تر از ۲- را نمایش می‌دهد؛ بنابراین نمایش این مجموعه به زبان ریاضی به صورت مقابل است: $D=\{x\,|\,x\in R, x<-۲\}$

-۱۰

۱) $A\cup B: B\subseteq A\Rightarrow A\cup B=A\Rightarrow\{x\in R\,|\,۱\le x\le ۳\}$

۲) $A\cap B: B\subseteq A\Rightarrow A\cap B=B\Rightarrow\{x\in Q'\,|\,۱\le x\le ۳\}$

۳) $A-B: R-Q'=Q\Rightarrow A-B=\{x\in Q\,|\,۱\le x\le ۳\}$

۴) $B-A: B\subseteq A\Rightarrow B-A=\varnothing$

-۱۱

$A\cap B=\{x\,|\,x\in R, -۲\le x<۳\}$ $\quad$ $A\cup B=\{x\,|\,x\in R, x\le ۵\}$

$A-B=\{x\,|\,x\in R, ۳\le x\le ۵\}$ $\quad$ $B-A=\{x\,|\,x\in R, x<-۲\}$

کاربرگ ۷

۱-

۱) ۹ ۲) $|-۲|=۲$ ۳) $|۶-۲۰|=۱۴$

۴) $|۱۲|=۱۲$ ۵) $|۵+۶|=۱۱$ ۶) $|+۴۲|=۴۲$

۷) $|۱۴-۱۴|=۰$ ۸) $|۰|=۰$

۲-

۱) $|\underbrace{۰/۳^۲-۰/۳^۴}_{+}|=۰/۳^۲-۰/۳^۴$ ۲) $|\underbrace{۰/۱^۵-۰/۱^۴}_{-}|=۰/۱^۴-۰/۱^۵$

۳) $۳+۴+۹=۱۶$ ۴) $۲\times\frac{۵}{۲}+۴+۹=۱۸$

۵) $\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۳}-\frac{۲}{۳}=۱$ ۶) $-۷-۵+۱۰=-۲$

۷) $-۸+۰-۴=-۱۲$ ۸) $۴\times۴-۲-۰=۱۴$

۳-

۱) $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$ ۲) $|a-b|\le|a|+|b|$ ۳) $|a-b|\ge|a|-|b|$

۴-

۱) $\begin{cases}|ab|=ab\\|a+b|=a+b\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}|a+b|=a+b\\|a-b|=a-b\\|b-a|=a-b\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}|a+b|=-a-b\\|a-b|=b-a\\|b-a|=b-a\end{cases}$

۵- ابتدا مثبت یا منفی بودن هر عدد را تعیین می‌کنیم:

می‌دانیم $\sqrt{۲}$ در حدود ۱/۴ می‌باشد پس $\sqrt{۲}-۱$ عددی منفی است. بنابراین:

$$|۱-\sqrt{۲}|=-(۱-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}-۱$$

می‌دانیم $\sqrt{۳}$ در حدود ۱/۷ است. پس $\sqrt{۳}-۲$ عددی مثبت است. بنابراین: $|۲-\sqrt{۳}|=۲-\sqrt{۳}$

می‌دانیم $\sqrt{۵}$ از $\sqrt{۷}$ کوچک‌تر است پس $\sqrt{۷}-\sqrt{۵}$ عددی منفی است.

$$|\sqrt{۵}-\sqrt{۷}|=-(\sqrt{۵}-\sqrt{۷})=\sqrt{۷}-\sqrt{۵}$$

۶-

۱) $۵+\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}+۱=۶-\sqrt{۲}$

۲) $\cancel{\sqrt{۳}}-۱+\sqrt{۵}-\cancel{\sqrt{۳}}=\sqrt{۵}-۱$

۳) $۳-\sqrt{۳}-۵+۲\sqrt{۳}=-۲+\sqrt{۳}$

۴) $\sqrt{۱۰}-\sqrt{۹}-۴+\sqrt{۱۰}=-۷+۲\sqrt{۱۰}$

۷- در این سوال بازه‌ای برای مقادیر a و b مشخص شده و خواسته شده تا عبارت شامل قدرمطلق را ساده کنیم. با توجه به علامت‌های a و b به تعیین علامت عبارت‌های درون قدرمطلق می‌پردازیم و قدرمطلق‌ها را برمی‌داریم:

۱) $|۲a-b|+۳|b|-۲|a|=-(۲a-b)+۳b-۲(-(a))=-۲a+b+۳b+۲a=۴b$

۲) $\frac{|a-b|}{a-b}+\frac{b-a}{|b-a|}=-\frac{(a-b)}{a-b}+\frac{b-a}{b-a}=-۱+۱=۰$ ($a-b<۰$, $b-a>۰$)

۸-

۱) $\sqrt{۳^۲}+\sqrt{(-۳)^۲}=|۳|+|-۳|=۳+۳=۶$

۲) $\sqrt{(-۱-\sqrt{۳})^۲}+\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲}=|-۱-\sqrt{۳}|+|۲-\sqrt{۳}|=-(-۱-\sqrt{۳})+۲-\sqrt{۳}$

$=۱+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}=۳$

۹-

۱) $|\frac{۲}{۳}+۴-\sqrt{۳}|=۴\frac{۲}{۳}-\sqrt{۳}$

۲) $|\frac{۲}{۳}-۴|-|\sqrt{۳}|=۴-\frac{۲}{۳}-\sqrt{۳}=\frac{۱۰}{۳}-\sqrt{۳}$

۳) $|\frac{۲}{۳}|-|-۴-\sqrt{۳}|=\frac{۲}{۳}-۴-\sqrt{۳}=-\frac{۱۰}{۳}-\sqrt{۳}$

۴) $\left|-۲\times\frac{۲}{۳}-(-۴)+۴\sqrt{۳}\right|=\left|-۴+۴+۴\sqrt{۳}\right|=۴\sqrt{۳}$

۱۰-

۱) $\frac{۵\times۶\times۱}{۴-۳}=۳۰$

۲) $۸\div۴\times۹=۲\times۹=۱۸$

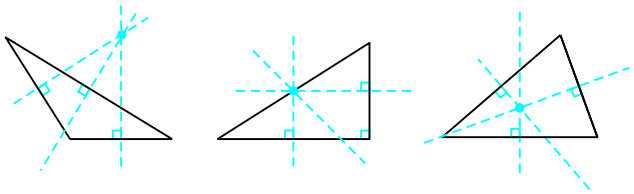
۳) $\frac{۹\div۳-۱۲\div۴}{-۱۲\div۱۲+۷}=\frac{۳-۳}{-۱+۷}=۰$

۱۱-

$A=|x|-|x-۱|+|۴-x|=\cancel{x}-\cancel{x}+۱+۴-x=۵-x$

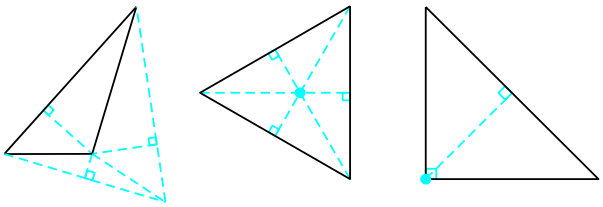
کاربرگ ۸

۱-



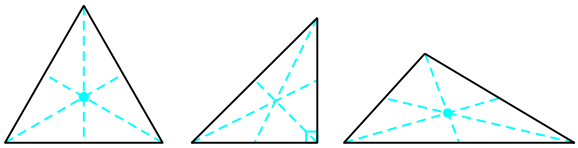
نقطه همرسی عمودمنصف‌ها بستگی به نوع مثلث دارد. در مثلث‌هایی که زاویه باز دارند در خارج از مثلث، در مثلث قائم‌الزاویه وسط وتر و در مثلث با زوایای تند درون مثلث است.

۲-



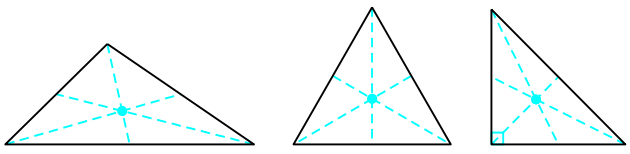
نقطه همرسی ارتفاع‌ها بستگی به نوع مثلث دارد. در مثلث با زاویهٔ باز خارج از مثلث، در مثلث قائم‌الزاویه روی رأس قائمه، در مثلث با زاویه‌های تند درون مثلث است.

۳-



نقطه همرسی میانه‌ها همواره درون مثلث است.

۴-



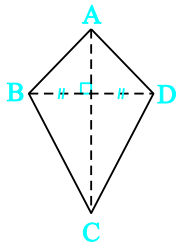
نقطه همرسی نیمسازها همواره درون مثلث است.

۵- اشکال ارائه شده مشابه استدلال (۳) است. گرچه هر دو استدلال نادرست هستند اما نوع آن‌ها که از شواهد موجود در گذشته نتیجه‌گیری می‌کنند که در آینده هم همان اتفاق رخ خواهد داد، مثل هم هستند.

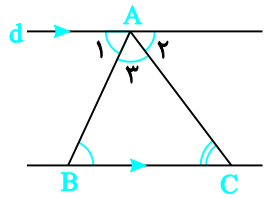
۶- ۱) این استدلال نادرست است. ممکن است $ABCD$ مربع باشد یا اصلاً متوازی‌الاضلاع باشد اما طول همهٔ اضلاع آن با هم برابر نباشد.

۲) این استدلال نادرست است. ممکن است $ABCD$ لوزی باشد. در این صورت $ABCD$ مربع نیست اما طول همهٔ اضلاع آن با هم برابرند. پس این عبارت نمی‌تواند درست باشد.

۳) این استدلال نیز نادرست است. برای رد حکم یک مثال نقض ارائه می‌کنیم. در شکل زیر AC عمودمنصف BD است، اما چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع نیست.



۷- ۱) مثلث دلخواه ABC را در نظر گرفته و از رأس A به موازات BC رسم می‌کنیم. در این صورت طبق قانون خطوط موازی و مورب داریم:



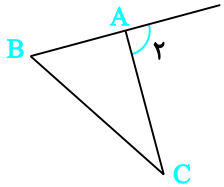
$$d \parallel BC \text{ و مورب } \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}$$

$$d \parallel BC \text{ و مورب } \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}$$

حالا چون $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$ پس داریم $\hat{B} + \hat{C} + \hat{A} = 180^\circ$

پس مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است.

۲) فرض کنید $\hat{A}_2$ زاویهٔ خارجی مثلث ABC در رأس A باشد. در این صورت داریم:



$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{A}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A} \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

پس زاویهٔ خارجی A برابر حاصل‌جمع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور $\hat{B}$ و $\hat{C}$ است.

۸-

فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \ , \ AB = AD$

حکم: $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC}$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AB = AD \\ AC = AC\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{A}BC \cong \overset{\Delta}{A}DC$$

۹- ب) بله، زیرا برای هر نقطه دلخواه می‌توان تساوی دو مثلث ایجاد شده را بر اساس حالت وتر و یـک ضـلع اثبات کرد.

$$\left.\begin{array}{l}OM = OM \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ OA = OB\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{O}AM \cong \overset{\Delta}{O}BM$$

۱۰- الف)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \overline{AP} = \overline{AP} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \overset{\Delta}{A}PH \cong \overset{\Delta}{A}H'P \Rightarrow PH = PH'$$

ب) بله، هر نقطه روی نیمساز دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

کاربرگ ۹

۱-

$$\overset{\Delta}{DEF} = \overset{\Delta}{LJK} \Rightarrow \begin{cases} \hat{Z} = ۱۱۰^\circ \\ u = ۱/۵ \end{cases} \qquad \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{GHI} \Rightarrow \begin{cases} \hat{y} = ۸۵^\circ \\ t = ۲ \\ x = ۳ \end{cases}$$

۲-

$$۲x - ۱۰ = x + ۱۵ \Rightarrow x = ۲۵ \Rightarrow \hat{G} = ۴۰^\circ \ , \ \hat{A} = \hat{F} = ۶۵^\circ$$

$$\hat{E} = \hat{B} = ۱۸۰^\circ - (۶۵^\circ + ۴۰^\circ) = ۷۵^\circ$$

۳-

$$۳x - ۵ = ۲x + ۵ \Rightarrow x = ۱۰$$

$$۴y - ۶ = ۳y + ۴ \Rightarrow y = ۱۰$$

۴- ۱)

$$\left.\begin{matrix} \overline{AO} = \overline{OB} \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ OC = OD \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{AOD} \cong \overset{\Delta}{BOC} \Rightarrow AD = BC$$

۲)

فرض: $AM = MB, OA = OB =$ شعاع

حکم: $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ = ۹۰^\circ$

$$\left.\begin{matrix} \overline{AO} = \overline{OB} \\ OM = OM \\ AM = BM \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{OBM} \cong \overset{\Delta}{OAM} \xrightarrow{\text{تناظر ... متساوی اجزای م}} \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ = ۹۰^\circ$$

پس OM عمودمنصف AB است.

۵- فرض: چهارضلعی ABCD مستطیل است.

حکم: قطرهای AC و BC با هم برابرند.

استدلال: $\begin{cases} D = C = ۹۰^\circ \\ \overline{DC} = \overline{DC} \\ \overline{AD} = \overline{BC} \end{cases}$ پس دو مثلث به حالت دو ضلع و زاویه بین برابرند، $\overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{BCD}$

درنتیجه: $\overline{AC} = \overline{BD}$

۶- برای پاسخ به این سوال باید به اثبات هم‌نهشتی دو مثلث AOB و AOB' بپردازیم:

شعاع دایره $AB', AB \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}' = ۹۰^\circ, OB = OB'$ مماس بر دایره‌اند: فرض

حکم: $AB = AB'$

$$\left.\begin{matrix} OA = OA \\ OB = OB' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{و ض ل ع}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{AOB'} \xrightarrow{\text{ت ن ا ظ ر ی م ا ز ا ی ا ی ه ا ن ی و س ا}} AB = AB'$$

۷-

۱) $\left.\begin{matrix} AB = DC \\ BE = CE \\ \hat{B} = \hat{C} = ۱۵۰^\circ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{DCE}$

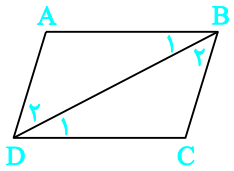
۲) اجزای متناظر اثبات بالا : $AE = DE$

۳) در مثلث $\overset{\Delta}{ABE}$ داریم:

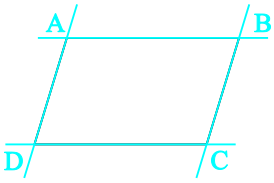
$$\hat{B} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{BEA} = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$

به همین ترتیب می‌توانیم نشان دهیم $\hat{DEC} = ۱۵^\circ$ پس: $\hat{AED} = ۶۰^\circ - ۱۵^\circ - ۱۵^\circ = ۳۰^\circ$

۸- ۱)

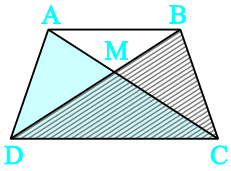


$$\left.\begin{matrix} \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \\ \hat{B}_۲ = \hat{D}_۲ \\ BD \quad \text{ض ل ع م ش ت ر ک} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{BCD} \xrightarrow{\text{ا ج ز ا ی م ت ن ا ظ ر}} \begin{cases} AB = CD \\ AD = BC \end{cases}$$



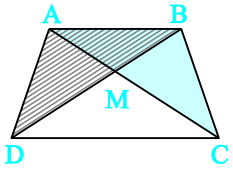
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}=180^\circ\\ \hat{A}+\hat{D}=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}=\hat{D}$$

۹- ۱)



$$\left.\begin{array}{l}BC=AD\\ \hat{C}=\hat{D}\\ DC \quad \text{ضلع مشترک}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\Delta}{A}DC\cong\overset{\Delta}{B}CD\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}}BD=AC$$

۲)



$$\left.\begin{array}{l}AB \quad \text{ضلع مشترک}\\ BC=AD\\ \hat{A}=\hat{B}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\Delta}{A}BD\cong\overset{\Delta}{B}AC$$

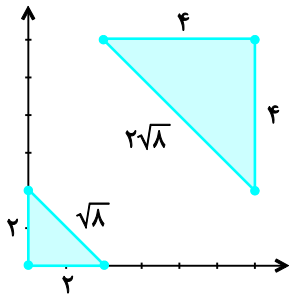
کاربرگ ۱۰

۱- ۱) اضلاع متناظر: $(AC, EG), (BC, FG), (AB, EF)$ ، زاویه‌های متناظر: $(B, F), (C, G), (A, E)$

۲) $\frac{۴}{۶} = \frac{۶}{۹} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$

۳) نسبت تشابه $\frac{۲}{۳}$ یا $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد.

۲- ۱)

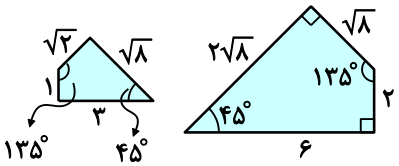


۲) ۲ یا $\frac{۱}{۲}$

۳) هر دو مثلث، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است یعنی یک زاویه ۹۰° و دو زاویه ۴۵° دارند.

۴) متشابهند؛ زیرا نسبت اضلاع یکسان و زاویه‌ها برابرند.

۳- ۱)



۲) اضلاع شکل شمارهٔ ۲، دو برابر شکل ۱ می‌باشد.

۳) زاویه‌های دو شکل با هم برابرند.

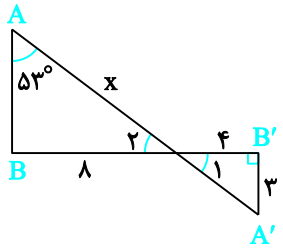
۴) اندازهٔ اضلاع شکل (۱)، $\frac{۱}{۲}$ شکل (۲) می‌باشد.

۵) بله، زیرا نسبت اضلاع یکسان و زاویه‌ها برابرند.

۴- ۱) A و B متشابهند، زیرا نسبت عرض‌ها ۱ به ۲ می‌باشد و به همین ترتیب نسبت طول‌ها هم ۱ به ۲ می‌باشد.

۲) خیر، برای تشابه دو مستطیل لازم است که نسبت عرض‌ها و نسبت طول‌ها یکسان باشند.

۵- ۱) از آن‌جایی که دو مثلث ABO و $A'B'O$ هر دو قائم‌الزاویه هستند



به کمک رابطهٔ فیثاغورس می‌توانیم مقدار x و y را به دست آوریم:

$$y^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow y^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow y = 5$$

$$x^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow x = 10$$

۲) می‌دانیم $\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$ علاوه بر این از آن‌جایی که $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{O}_2 = \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{O}_1 = 180^\circ \\ \hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}' = 53^\circ$$

۳) بله، زیرا هر سه زاویهٔ $\hat{A}'$ ، $\hat{B}'$ و $\hat{O}_1$ با زاویه‌های متناظرشان در مثلث ABO یعنی $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{O}_2$ برابرند. هم‌چنین نسبت اضلاع متناظر در دو شکل با هم برابر است.

۴) برای محاسبهٔ نسبت تشابه دو شکل کافی است نسبت بین دو ضلع دلخواه متناظر از دو مثلث را به دست آوریم:

$$\text{نسبت تشابه مثلث } ABO \text{ به } A'B'O = \frac{AB}{A'B'} = \frac{6}{3} = 2$$

۶- ۱) با توجه به زاویه‌های برابر در شکل نسبت تشابه به‌صورت زیر قابل نوشتن است.

$$\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DE}$$

پس داریم:

$$\frac{x}{3} = \frac{12}{4} = \frac{10}{y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = 3 \Rightarrow x = 9 \\ \frac{10}{y} = 3 \Rightarrow y = \frac{10}{3} \end{cases}$$

۲) دقت کنید که تنها زوایای باز در دو مثلث زاویه‌های B و D هستند. پس داریم:

$$\hat{B} = \hat{D} \Rightarrow 5\alpha - 30^\circ = 3\alpha + 30^\circ \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

از طرفی زوایای C و F روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع‌ها در دو مثلث هستند پس $\hat{C}=\hat{F}=۱۰^\circ$. بنابراین داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow y+۵\alpha-۳۰^\circ+۱۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow y+۵\times ۳۰^\circ-۳۰^\circ+۱۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow y+۱۳۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow y=۵۰^\circ$$

ضمناً چون $\hat{C}=\hat{F}$ پس داریم:

$$۲\beta-۳۰^\circ=۱۰^\circ \Rightarrow ۲\beta=۴۰^\circ \Rightarrow \beta=۲۰^\circ$$

نهایتاً با توجه به نسبت تشابه دو مثلث داریم:

$$\frac{EF}{AC}=\frac{FD}{BC} \Rightarrow \frac{۱۲}{۲۴}=\frac{FD}{۲۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{FD}{۲۰} \Rightarrow FD=۱۰ \Rightarrow ۲x+۴=۱۰ \Rightarrow x=۳$$

۷- ۱) به کمک نسبت تشابه مثلث‌ها، مقادیر x و y را به دست می‌آوریم، داریم:

$$\frac{۳}{۲x-۱}=\frac{۵}{۴y+۳}=\frac{۷}{۲۱} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۳}{۲x-۱}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۹=۲x-۱ \Rightarrow ۲x=۱۰ \Rightarrow x=۵ \\ \frac{۵}{۴y+۳}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۴y+۳=۱۵ \Rightarrow ۴y=۱۲ \Rightarrow y=۳ \end{cases}$$

۲) چون محیط مثلث ABC برابر $۳+۵+۷=۱۵$ واحد است و نسبت تشابه مثلث‌ها نیز برابر ۳ است. نتیجه می‌گیریم محیط مثلث DEF برابر $۳\times ۱۵=۴۵$ واحد است.

۸- ۱) ابتدا توجه کنید که محیط مثلث ABC برابر $۱۳+۱۲+۵=۳۰$ واحد است. حالا دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: محیط مثلث موردنظر کمتر از محیط مثلث ABC باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{\text{محیط مثلث}}{\text{محیط } ABC}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{\text{محیط مثلث}}{۳۰}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{محیط مثلث}=\frac{۲}{۳}\times ۳۰=۲۰$$

حالت ۲: محیط مثلث موردنظر بیش‌تر از محیط ABC باشد که در این صورت داریم:

$$\frac{\text{محیط } ABC}{\text{محیط مثلث}}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{محیط مثلث}=\frac{۳}{۲}\times ۳۰=۳\times ۱۵=۴۵$$

۲) نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر $(\frac{۲}{۳})^{۲}=\frac{۴}{۹}$ است. از طرفی مثلث ABC قـائم‌الزاویـه اسـت. چـون $۱۳^{۲}=۱۲^{۲}+۵^{۲}$ ، پس $S_{ABC}=\frac{۱۲\times ۵}{۲}=۳۰$. بنابراین اگر مساحت مثلث مـوردنظر را بـا S' نمـایش دهیم. داریم:

۱) $\frac{S'}{۳۰}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow S'=\frac{۴\times ۳۰}{۹}=\frac{۴۰}{۳}$

۲) $\frac{۳۰}{S'}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow S'=\frac{۹\times ۳۰}{۴}=\frac{۱۳۵}{۲}$

۹- ۱) فاصلهٔ واقعی دو نقطه برابر است با : $۸\times ۱۵۰=۱۲۰۰$

۲) چون فاصلهٔ ۱۲۰۰ واحدی در نقشه به مقیاس $\frac{۱}{a}$ برابر ۳ واحد است پس مقدار a برابر است با:

$$\frac{۱}{a}=\frac{۳}{۱۲۰۰}\Rightarrow\frac{۱}{a}=\frac{۱}{۴۰۰}\Rightarrow a=۴۰۰$$

کاربرگ ۱۱

۱- برای پاسخ به سوال کافیست از قوانین کمک بگیرید.

۱) $۵^{۳} \times ۵^{۷} = ۵^{۳+۷} = ۵^{۱۰}$

۲) $(-۴)^{۵} \times (-۴)^{۴} = (-۴)^{۴+۵} = (-۴)^{۹}$

۳) $(\frac{۳}{۷})^{۴} \times (\frac{۳}{۷})^{۶} = (\frac{۳}{۷})^{۴+۶} = (\frac{۳}{۷})^{۱۰}$

۴) $(\sqrt{۲})^{۳} \times (\sqrt{۲})^{۵} = (\sqrt{۲})^{۳+۵} = (\sqrt{۲})^{۸}$

۵) $(-۵)^{۴} \times ۷^{۴} = (-۵ \times ۷)^{۴} = (-۳۵)^{۴}$

۶) $(-۸)^{۳} \times (-۱۲)^{۳} = (-۸ \times (-۱۲))^{۳} = ۹۶^{۳}$

۷) $(-\frac{۳}{۷})^{۵} \times (\frac{۱۴}{۵})^{۵} = (-\frac{۳}{۷} \times \frac{۱۴}{۵})^{۵} = (-\frac{۶}{۵})^{۵}$

۸) $(-\frac{۸}{۷})^{۱۱} \times (\frac{۷}{۸})^{۱۱} = (-\frac{۸}{۷} \times \frac{۷}{۸})^{۱۱} = (-۱)^{۱۱} = -۱$

۲-

$(\frac{۱}{۴})^{-۳} = ۶۴$ ، $\frac{۱}{xy} = (xy)^{-۱}$ ، $x^{-۲} = (\frac{۱}{x})^{۲}$ ، $(-۳)^{-۲} = \frac{۱}{۹}$ ، $\frac{۱}{۱۶} = ۴^{-۲}$

۳-

۱) $۵^{-۳} = \frac{۱}{۵^{۳}} = \frac{۱}{۱۲۵}$

۲) $(\frac{۱}{۷})^{-۲} = \frac{۱^{-۲}}{۷^{-۲}} = \frac{۱}{۷^{-۲}} = ۷^{۲} = ۴۹$

۳) $(-۲)^{-۴} = \frac{۱}{(-۲)^{۴}} = \frac{۱}{۱۶}$

۴) $(\frac{۳}{۲})^{-۵} = (\frac{۲}{۳})^{۵} = \frac{۲^{۵}}{۳^{۵}} = \frac{۳۲}{۲۴۳}$

۵) $۲^{-۱} + ۳^{-۱} + ۴^{-۱} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} = \frac{۶+۴+۳}{۱۲} = \frac{۱۳}{۱۲}$

۶) $-(-۷)^{-۲} = -\frac{۱}{(-۷)^{۲}} = -\frac{۱}{۴۹}$

۷) $۵^{۳} \times ۵^{-۷} = ۵^{۳+(-۷)} = ۵^{-۴} = \frac{۱}{۵^{۴}} = \frac{۱}{۶۲۵}$

۸) $((-\frac{۲}{۵})^{-۲})^{-۱} = (-\frac{۲}{۵})^{-۱ \times (-۲)} = (-\frac{۲}{۵})^{۲} = \frac{۴}{۲۵}$

۴-

۱) $(۳)^{۲} = ۹$

۲) $۵^{۳} \times ۵^{-۴} = ۵^{-۱} = \frac{۱}{۵}$

۳) $۲^{۱۰} \times ۲^{-۹} = ۲^{۱} = ۲$

۴) $(\frac{۷}{۱۲})^{۷} \times (\frac{۲۴}{۱۴})^{۷} = (\frac{۷ \times ۲۴}{۱۲ \times ۱۴})^{۷} = ۱^{۷} = ۱$

-۵

۱) $۷^{-۱} \boxed{>} ۰$

۲) $۲^{-۷} \boxed{<} ۲^{۰}$

۳) $۴^{-۱} \boxed{>} ۴^{-۲}$

۴) $(-\frac{۳}{۸})^{۰} \boxed{=} \frac{۲^{۵}}{۲^{۵}}$

۵) $-۷^{-۲} \boxed{<} (-۷)^{-۲}$

۶) $(۰/۳)^{-۴} \boxed{>} (۰/۲)^{-۲}$

-۶

۱) $\frac{۲^{-۲۲} \times ۲^{۱۲}}{۲^{-۲۱} \times ۲^{۳۰}} = \frac{۲^{-۱۰}}{۲^{۹}} = ۲^{-۱۹}$

۲) $(\frac{۲}{۵})^{۱۰} \times (۲/۵)^{-۵} = (\frac{۲}{۵})^{۱۰} \times (\frac{۲}{۵})^{۵} = (\frac{۲}{۵})^{۱۵}$

۳) $\frac{۵^{-۷} \times ۲۵^{۳} \times ۹^{-۱}}{(۰/۰۰۸)^{-۲} \times ۱۵^{-۲}} = \frac{۵^{-۷} \times ۵^{۶} \times ۳^{-۲}}{۵^{۶} \times ۳^{-۲} \times ۵^{-۲}} = \frac{۵^{-۷}}{۵^{-۲}} = ۵^{-۵}$

۴) $\frac{۲^{۶} \times ۲^{۱۲} \times ۳^{-۸}}{۲^{۱۰} \times ۳^{-۵} \times ۳^{-۳}} = \frac{۲^{۱۸}}{۲^{۱۰}} = ۲^{۸}$

-۷

۱) $۱۶^{-۵} = ۲^{-۲۰}$, $۴^{-۳} = ۲^{-۶}$, $(\frac{۱}{۲})^{۳} = ۲^{-۳}$, $۸^{-۳} = ۲^{-۹} \Rightarrow ۱۶^{-۵} < ۸^{-۳} < ۴^{-۳} < (\frac{۱}{۲})^{۳}$

۲) $۶۲۵^{۲} = ۵^{۸}$, $۲۵^{-۱} = ۵^{-۲}$, $(\frac{۱}{۱۲۵})^{۳} = ۵^{-۹}$, $۲۵^{-۶} = ۵^{-۱۲}$

$\Rightarrow ۲۵^{-۶} < (\frac{۱}{۱۲۵})^{۳} < ۲۵^{-۱} < ۶۲۵^{۲} < ۵^{۹}$

کاربرگ ۱۲

۱- در هر سه قسمت، اعداد داده شده بزرگ‌تر از ۱۰ هستند. بنابراین داریم:

۱) $۲۵۷۴۹۱ = ۲/۵۷۴۹۱ \times ۱۰^{۵}$
۵ رقم

۲) $۴۷۳۵/۲۵ = ۴/۷۳۵۲۵ \times ۱۰^{۳}$
۳ رقم

۳) $۶۲۵۳ \times ۱۰^{۵} = ۶/۲۵۳ \times ۱۰^{۳} \times ۱۰^{۵} = ۶/۲۵۳ \times ۱۰^{۸}$
۳ رقم

۲- با توجه به این‌که هر دو عدد کوچک‌تر از ۱ هستند، داریم:

۱) $۰/\underbrace{۰۰۰۰۰۰۷}_{\text{۷ رقم}}۰۳۰۵ = ۷/۰۳۰۵ \times ۱۰^{-۷}$

۲) $۰/۰۰۰۵۳۷۴۲ \times ۱۰^{-۱۵} = ۵/۳۷۴۲ \times ۱۰^{-۴} \times ۱۰^{-۱۵} = ۵/۳۷۴۲ \times ۱۰^{-۱۹}$
۴ رقم

۳-

$$۴/۳۶ \times ۱۰^{-۳} < ۲/۳ \times ۱۰^{-۲} < ۲/۹ \times ۱۰^{-۲} < ۲/۵ \times ۱۰^{۵}$$

۴- باید جرم مشتری را به جرم زمین تقسیم کنیم:

$$\frac{۱/۸۰}{۵/۵۹} \times ۱۰^{۳} = ۰/۳۲۲ \times ۱۰^{۳} = ۳۲۲$$

پس سیاره‌ی مشتری حدوداً ۳۲۲ برابر زمین جرم دارد.

۵-

A	B
$۳/۷۵ \times ۱۰^{۵}$	۳۷/۵۰
$۳۷/۵ \times ۱۰^{-۴}$	۰/۰۰۳۷۵
۳۷۵۰×۱۰^{-۲}	۳۷۵۰۰۰
$۳/۷۵ \times ۱۰^{-۲}$	۰/۰۳۷۵

-۶

۱) $-۲,-۳,-۴$ ۲) $-۱,۱,۲$ ۳) $۰,۱,۲$ ۴) $۲,۳,۴$

-۷ ۱) ابتدا از $۱۰^{۹}$ در دو عدد فاکتور می‌گیریم:

$$(۹/۳۷+۵/۶۵)\times۱۰^{۹}=۱۵/۰۲\times۱۰^{۹}=۱/۵۰۲\times۱۰^{۱}\times۱۰^{۹}=۱/۵۰۲\times۱۰^{۱۰}$$

۲) برای سادگی اعداد اعشاری را در یکدیگر و توان‌های ۱۰ را در یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$(۵/۴\times۳/۶)\times(۱۰^{۵}\times۱۰^{-۹})=۱۹/۴۴\times۱۰^{-۴}=۱/۹۴۴\times۱۰^{۱}\times۱۰^{-۴}=۱/۹۴۴\times۱۰^{-۳}$$

۳) برای سادگی محاسبات، تقسیم را به صورت کسری بنویسیم:

$$\frac{۴/۰۸\times۱۰^{۶}}{۳/۴\times۱۰^{۲}}=\frac{۴/۰۸}{۳/۴}\times۱۰^{۶-۲}=۱/۲\times۱۰^{۴}$$

-۸

عدد	مربع عدد (توان دوم)
$۴,-۴$	۱۶
$\frac{۳}{۴},-\frac{۳}{۴}$	$\frac{۹}{۱۶}$
$\sqrt{۶},-\sqrt{۶}$	۶
$\sqrt{۸},-\sqrt{۸}$	۸
$\sqrt{۹},-\sqrt{۹}$	۹
$-۱۱,۱۱$	۱۲۱

-۹

عدد	۴	-۴	۵	-۵	۳	۰	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۳}{۴}$
مکعب عدد (توان سوم)	۶۴	-۶۴	۱۲۵	-۱۲۵	۲۷	۰	$\frac{۱}{۲۷}$	$-\frac{۲۷}{۶۴}$

-۱۰

۱) ریشه‌های دوم ۲۵ : $\sqrt{۲۵}=۵\ ,\ -\sqrt{۲۵}=-۵$

۲) $\frac{۶۴}{۴۹}$ ریشه‌های دوم : $\sqrt{\frac{۶۴}{۴۹}}=\frac{۸}{۷}\ ,\ -\sqrt{\frac{۶۴}{۴۹}}=-\frac{۸}{۷}$

۳) ریشه دوم ۱۶- ندارد زیرا همان‌طور که می‌دانیم اعداد منفی ریشهٔ دوم ندارند.

۱۱- با توجه به تعریف ریشه سوم عددهای حقیقی داریم:

۱) ۳۴۳ ریشهٔ سوم : $\sqrt[3]{۳۴۳}=\sqrt[3]{۷^{۳}}=۷$

۲) $-۰/۰۰۸$ ریشهٔ سوم : $\sqrt[3]{-۰/۰۰۸}=\sqrt[3]{\frac{-۸}{۱۰۰۰}}=\sqrt[3]{-\frac{۲^{۳}}{۱۰^{۳}}}=-\frac{۲}{۱۰}=۰/۲$

۳) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ریشهٔ سوم : $\sqrt[3]{\frac{۲۷}{۶۴}}=\sqrt[3]{\frac{۳^{۳}}{۴^{۳}}}=\frac{۳}{۴}$

۱۲-

۱) $|a|-|b|=a-(-b)=a+b$ (+ , −)

۲) $|x-y|-|x|=x-y-x=-y$ (+ , +)

۳) $|۹|-|۸|=۱$

۴) $|a+b|-|a-b|=a+b+a-b=۲a$ (+ , −)

کاربرگ ۱۳

۱- ابتدا باید عدد یا عبارت زیر هر رادیکال را به صورت ضرب عامل‌های سازندهٔ آن بنویسیم و سپس آن‌ها را ساده کنیم.

۱) $\sqrt{۱۸}=\sqrt{۲\times۹}=\sqrt{۲\times۳^{۲}}=۳\sqrt{۲}$

۲) $\sqrt{۵۴}=\sqrt{۲۷\times۲}=\sqrt{۳^{۳}\times۲}=\sqrt{۳^{۲}\times۳\times۲}=۳\sqrt{۲\times۳}=۳\sqrt{۶}$

۳) $\sqrt{۷۲}=\sqrt{۲\times۳۶}=\sqrt{۲\times۶^{۲}}=۶\sqrt{۲}$

۴) $\sqrt[۳]{۱۰۸a^{۵}}=\sqrt[۳]{۲۷\times۴\times a^{۵}}=\sqrt[۳]{۳^{۳}\times۲^{۲}\times a^{۳}\times a^{۲}}=۳a\sqrt[۳]{۴a^{۲}}$

۲-

ستون اول : $۷\sqrt{۳}+۵\sqrt{۵}$

ستون دوم : $\frac{۲۲}{۵}\sqrt[۳]{۳}-۴\sqrt{۵}$

ستون سوم : $\frac{۷}{۳}\sqrt{۸}-۲\sqrt{۵}=\frac{۱۴}{۳}\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵}$

ستون چهارم : $\frac{۱۰}{۳}\sqrt{x}+\sqrt{y}$

ستون پنجم : $۶\sqrt{ab}-\sqrt{a}$

ستون ششم : $۵\sqrt{۷}+\sqrt{۳}+\sqrt{۵}$

۳-۱) با توجه به آن‌که $۲۷=۹\times۳$ نتیجه می‌گیریم $\sqrt{۲۷}=\sqrt{۹\times۳}=۳\sqrt{۳}$. حالا می‌توان نوشت:

$$۲\sqrt{۳}+۴\sqrt{۲۷}=۲\sqrt{۳}+۴(۳\sqrt{۳})=۲\sqrt{۳}+۱۲\sqrt{۳}=\sqrt{۳}(۲+۱۲)=۱۴\sqrt{۳}$$

۲) مانند قسمت بالا هر رادیکال را تا آن‌جا که می‌توانیم ساده می‌کنیم و سپس از عوامل مشترک فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{\sqrt{۴۵}}{۵}-\frac{۲\sqrt{۲۰}}{۵}+\frac{\sqrt{۸۰}}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}-\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}+\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}=\sqrt{۵}(\frac{۳}{۵}-\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۵})=\frac{۳}{۵}\sqrt{۵}$$

۳) $\sqrt{۷۵}-\sqrt{۴۸}+\sqrt{۳}=\sqrt{۵^{۲}\times۳}-\sqrt{۴^{۲}\times۳}+\sqrt{۳}=۵\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}+\sqrt{۳}=(۵-۴+۱)\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$

۴) $\sqrt[۳]{۵۴}-\sqrt[۳]{۱۲۸}=\sqrt[۳]{۲۷\times۲}-\sqrt[۳]{۲^{۷}}=\sqrt[۳]{۳^{۳}\times۲}-\sqrt[۳]{۲^{۶}\times۲}=۳\sqrt[۳]{۲}-۴\sqrt[۳]{۲}=(۳-۴)\sqrt[۳]{۲}=-\sqrt[۳]{۲}$

۵) $۱۲\sqrt[۳]{۲}+۲۰\sqrt[۳]{۵۴}-۱۸\sqrt[۳]{۱۲۸}=۱۲\sqrt[۳]{۲}+۲۰\sqrt[۳]{۲۷\times۲}-۱۸\sqrt[۳]{۲^{۷}}=۱۲\sqrt[۳]{۲}+۲۰\sqrt[۳]{۳^{۳}\times۲}-۱۸\sqrt[۳]{۲^{۶}\times۲}$

$$=۱۲\sqrt[۳]{۲}+۲۰\times۳\sqrt[۳]{۲}-۱۸\times۴\sqrt[۳]{۲}=۱۲\sqrt[۳]{۲}+۶۰\sqrt[۳]{۲}-۷۲\sqrt[۳]{۲}=(۱۲+۶۰-۷۲)\sqrt[۳]{۲}=۰\times\sqrt[۳]{۲}=۰$$

۴-

۱) ابتدا تقسیم را به صورت کسری می‌نویسیم سپس هر رادیکال را تا آن‌جا که می‌توانیم ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۵۴}+\sqrt{۲۹۴}}{\sqrt{۷۵}}=\frac{\sqrt{۹\times ۶}+\sqrt{۷^۲\times ۶}}{\sqrt{۲۵\times ۳}}=\frac{۳\sqrt{۶}+۷\sqrt{۶}}{۵\sqrt{۳}}=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۵\sqrt{۳}}=۲\sqrt{\frac{۶}{۳}}=۲\sqrt{۲}$$

۲) ابتدا با توجه به این‌که $۳\times ۲۵=۷۵$ و $۳\times ۴=۱۲$ پرانتز سمت چپ را تا آن‌جا که می‌توانیم ساده می‌کنیم:

$$\frac{۳}{\sqrt{۷۵}}-\frac{۱}{\sqrt{۱۲}}+\frac{۲}{۵\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۵\sqrt{۳}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}+\frac{۲}{۵\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}(\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۵})=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۴\times ۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۲}}$$

بنابراین حاصل عبارت موردنظر $(\frac{۱}{\sqrt{۱۲}})\div(\frac{۱}{\sqrt{۱۲}})$ می‌شود برابر ۱ است.

۵-

$$۱)\ (\sqrt{۵}-\sqrt{۳})(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})=\sqrt{۵^۲}+\sqrt{۱۵}-\sqrt{۱۵}-\sqrt{۳^۲}=۵-۳=۲$$

$$۲)\ (\sqrt{۳}+\sqrt{۷})(۲\sqrt{۳}-\sqrt{۷})=۲\sqrt{۳^۲}-\sqrt{۲۱}+۲\sqrt{۲۱}-\sqrt{۷^۲}=۲\times ۳-۷+\sqrt{۲۱}$$

$$=۶-۷+\sqrt{۲۱}=-۱+\sqrt{۲۱}=\sqrt{۲۱}-۱$$

$$۳)\ (\sqrt{۲}-\sqrt{۷})(\sqrt{۶}+\sqrt{۲۱})=\sqrt{۱۲}+\sqrt{۴۲}-\sqrt{۴۲}-\sqrt{۲۱\times ۷}=\sqrt{۴\times ۳}-\sqrt{۴۹\times ۳}=۲\sqrt{۳}-۷\sqrt{۳}$$

$$=(۲-۷)\sqrt{۳}=-۵\sqrt{۳}$$

$$۴)\ (۲\sqrt{۲}-۱)(۲\sqrt{۶}+\sqrt{۳})=۴\sqrt{۱۲}+۲\sqrt{۶}-۲\sqrt{۶}-\sqrt{۳}=۴\sqrt{۴\times ۳}-\sqrt{۳}=۴\times ۲\sqrt{۳}-\sqrt{۳}$$

$$=۸\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=(۸-۱)\sqrt{۳}=۷\sqrt{۳}$$

$$۵)\ (۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳})(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲})=۴\sqrt{۶}-۶\sqrt{۴}+۶\sqrt{۹}-۹\sqrt{۶}=(۴-۹)\sqrt{۶}-۶\times ۲+۶\times ۳$$

$$=-۵\sqrt{۶}-۱۲+۱۸=-۵\sqrt{۶}+۶=۶-۵\sqrt{۶}$$

$$۶)\ (\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۲۵})(۲\sqrt[۳]{۵}+۳\sqrt[۳]{۲۵})=۲\sqrt[۳]{۲۵}+۳\sqrt[۳]{۱۲۵}-۲\sqrt[۳]{۱۲۵}-۳\sqrt[۳]{۶۲۵}$$

$$=۲\sqrt[۳]{۲۵}+(۳-۲)\sqrt[۳]{۱۲۵}-۳\sqrt[۳]{۱۲۵\times ۵}=۲\sqrt[۳]{۲۵}+۵-۳\times ۵\sqrt[۳]{۵}=۲\sqrt[۳]{۲۵}-۱۵\sqrt[۳]{۵}+۵$$

۶- ۱) مخرج کسر شامل عامل $\sqrt{۳}$ می‌باشد از این‌رو با ضریب صورت و مخرج کسر در عدد $\sqrt{۳}$ خواهیم داشت:

$$\frac{۵}{۴\sqrt{۳}}=\frac{۵}{۴\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۴(\sqrt{۳})^۲}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۴(۳)}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۱۲}$$

۲) ابتدا توجه کنید که $\sqrt{۸}=\sqrt{۴\times۲}=۲\sqrt{۲}$. بنابراین کسر موردنظر به‌صورت $\frac{-\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۲}}$ تبدیل می‌شود

حال می‌توان نوشت:

$$\frac{-\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۲}}=\frac{-\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{-\sqrt{۶}}{۲(\sqrt{۲})^{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۴}$$

۳) مخرج کسر دارای عامل $\sqrt[۳]{۲}$ می‌باشد پس با ضرب صورت و مخرج کسر در عدد $\sqrt[۳]{۲^{۲}}$ می‌توان

نوشت:

$$\frac{۵}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۵}{\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲^{۲}}}{\sqrt[۳]{۲^{۲}}}=\frac{۵\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۲^{۳}}}=\frac{۵\sqrt[۳]{۴}}{۲}$$

۴) مخرج کسر دارای عامل $\sqrt[۴]{۵}$ می‌باشد. با ضرب عدد $\sqrt[۴]{۵^{۳}}$ در صورت و مخرج کسر خواهیم داشت:

$$\frac{۷}{\sqrt[۴]{۵}}=\frac{۷}{\sqrt[۴]{۵}}\times\frac{\sqrt[۴]{۵^{۳}}}{\sqrt[۴]{۵^{۳}}}=\frac{۷\sqrt[۴]{۵^{۳}}}{\sqrt[۴]{۵^{۴}}}=\frac{۷\sqrt[۴]{۱۲۵}}{۵}$$

۷- ۱) ابتدا با توجه به این‌که $۱۸=۹\times۲$ و $۳۲=۱۶\times۲$ مخرج کسر را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{۱۸}+\sqrt{۳۲}=۳\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}=۷\sqrt{۲}$$

در نتیجه باید عبارت $\frac{۴}{۷\sqrt{۲}}$ را گویا کنیم. حال با ضرب عدد $\sqrt{۲}$ در صورت و مخرج این کسر خواهیم

داشت:

$$\frac{۴}{۷\sqrt{۲}}=\frac{۴}{۷\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۷\times۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۷}$$

۲) ابتدا در مخرج کسر از $\sqrt{۳}$ به‌صورت $۳\sqrt{۳}+\sqrt{۶}=\sqrt{۳}(۳+\sqrt{۲})$ فاکتور می‌گیریم. از این‌رو می‌توان

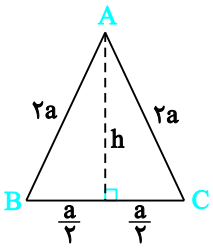
نوشت:

$$\frac{۳+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}(۳+\sqrt{۲})}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

اکنون با ضرب کردن $\sqrt{۳}$ در صورت و مخرج کسر داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۸- با توجه به شکل و به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$AH^{۲}+HC^{۲}=AC^{۲}\Rightarrow h^{۲}+(\frac{a}{۲})^{۲}=(۲a)^{۲}$$

$$\Rightarrow h^{۲}+\frac{a^{۲}}{۴}=۴a^{۲}\Rightarrow h^{۲}=۴a^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow h^{۲}=\frac{۴a^{۲}\times ۴-a^{۲}}{۴}\Rightarrow h^{۲}=\frac{۱۵a^{۲}}{۴}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{۱۵}a}{۲}$$

بنابراین با توجه به رابطهٔ به دست آمده بین a و b داریم:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{a\times h}{۲}=\frac{a\times\frac{\sqrt{۱۵}a}{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۵}a^{۲}}{۴}$$

آزمون ۱ ترم اول

۱-

الف) نادرست ب) نادرست ج) نادرست

د) درست ر) نادرست ز) درست

۲-

الف) ۳۶ ب) گویا ج) نیمساز

د) فرض ر) ۶ ز) $\frac{۱}{۳۲}$

۳- الف) گزینهٔ ۳ ب) گزینهٔ ۲ ج) گزینهٔ ۱ د) گزینهٔ ۳

۴- الف)

$$A=\{(-۱)^۲+۱,(۰)^۲+۱,(۱)^۲+۱,(۲)^۲+۱\}=\{۲,۱,۲,۵\}=\{۱,۲,۵\}$$

ب) $B=\{۳n+۲\,|\,n\in N, n<۹\}$

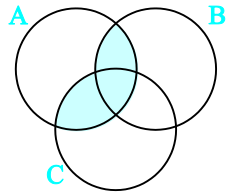
۵-

$$C\cup D=\{۳,۴,۵,۶,۷\} \qquad C\cap D=\{۵,۶\}$$
$$(C-D)\cup(D-C)=\{۳,۴\}\cup\{۷\}=\{۳,۴,۷\}$$

۶- الف)

$$S=\{\text{پسر و دختر}\} \text{ و } A=\{\text{پسر}\} \text{ و } P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۲}$$

ب)



۷- الف) $\frac{۳+۷}{۱۳+۱۱},\frac{۱۰+۷}{۲۴+۱۳}\Rightarrow\frac{۱۰}{۲۴},\frac{۱۷}{۳۷}$

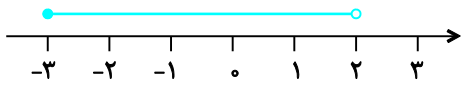
ب) عدد ۱۰

$$۴۹<۵۷<۶۴\Rightarrow ۷<\sqrt{۵۷}<۸\Rightarrow ۳+۷<۳+\sqrt{۵۷}<۳+۸\Rightarrow ۱۰<۳+\sqrt{۵۷}<۱۱$$

ج) $\sqrt{۵}-۲$

۸- الف) $W-N=\{0\}\quad,\quad R\cap N=N$

ب)



ج) $|\sqrt{۲}-۳|+|\sqrt{۲}-۱|=۳-\sqrt{۲}+\sqrt{۲}-۱=۲$

۹-

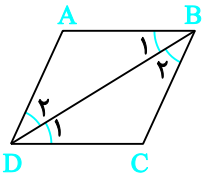
$$\frac{\text{اندازه روی نقشه}}{\text{اندازه واقعی}}=\frac{۱}{۲۰۰۰۰}=\frac{۱۳}{x}\Rightarrow x=۲۰۰۰۰\times۱۳=۲۶۰۰۰۰cm$$

$۲۶۰۰۰۰\div۱۰۰=۲۶۰۰m$

۱۰-

$ABCD$ متوازی‌اضلاع است. : فرض

حکم: $AB=DC, AD=BC$



$\left.\begin{array}{rl} \hat{B}_۱=\hat{D}_۱ & \text{مورب } BD \text{ و } AB\parallel DC \\ & \text{ضلع مشترک } BD \\ \hat{B}_۲=\hat{D}_۲ & \text{مورب } BD \text{ و } AD\parallel BC \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز}}\overset{\Delta}{A}DC\cong\overset{\Delta}{A}BC$

تساوی اجزای متناظر $AB=DC, AD=BC$

۱۱- الف) $\frac{۱}{۲}$ یا ۲

ب) $۳\times۲=۳x-۳\Rightarrow ۳x=۹\Rightarrow x=۳$

ج) اضلاع مثلث بزرگ‌تر عبارتند از: $۳\times۲,۴\times۲,۵\times۲$

$P=۶+۸+۱۰=۲۴$ سانتی‌متر

۱۲- الف)

$$\frac{(\frac{۲}{۳})^{۳}\times(\frac{۸}{۳})^{-۳}}{-۲^{۵}\times۲^{-۸}}=\frac{(\frac{۲}{۳})^{۳}\times(\frac{۳}{۸})^{۳}}{-۲^{-۳}}=\frac{(\frac{۲\times۳}{۳\times۸})^{۳}}{-۲^{-۳}}=\frac{(\frac{۱}{۴})^{۳}}{-۲^{-۳}}=\frac{۴^{-۳}}{-۲^{-۳}}=-۲^{-۳}=-\frac{۱}{۸}$$

ب) $(-۱)^{-۲۵}<(-۲)^{-۳}<(\frac{۱}{۳})^{-۲}\Rightarrow -۱,-\frac{۱}{۸},۹$

۱۳- الف)

$$۲\sqrt[۳]{۳}-۵\sqrt{۲}+۳\sqrt[۳]{۳}+۳\sqrt{۲}=۵\sqrt[۳]{۳}-۲\sqrt{۲}$$

ب)

$$۱)\ \frac{۲}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۱۰}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$$

$$۲)\ \frac{۳}{\sqrt[۳]{۵}}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵^{۲}}}{\sqrt[۳]{۵^{۲}}}=\frac{۳\sqrt[۳]{۲۵}}{۵}$$

آزمون ۲ ترم اول

۱-

الف) درست ب) درست ج) نادرست د) نادرست

۲-

الف) ۲ $(-۱,۱)$ ب) بی‌شمار ج) اثبات د) ۰/۲

۳-

الف) گزینهٔ ۳ ب) گزینهٔ ۳ ج) گزینهٔ ۳ د) گزینهٔ ۲

۴-

الف) لوزی ب) $۲\sqrt{۲}$

۵- الف) $A=\{۲x-۱ \mid x \in N\}$

ب) $B=\{۳,۷\}$

۶-

$$\{-\frac{۱۳}{۲},\frac{۶}{۵},۲^{۳}\}=\{۲^{۳},\frac{-\sqrt{۱۶۹}}{\sqrt{۴}},\frac{۶}{۵}\}$$

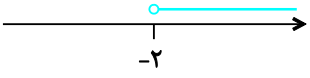
۷-

$n(A\cup C)=۵$ $B\cap C=\{۵,۷\}$ $B-A=\{۳,۵\}$

۸- الف) ۳۶ ب) $\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$

۹- الف) $\frac{۵}{۸},\frac{۸}{۱۳}$ ب) $\sqrt{۱۳}$

۱۰- الف)



ب) $۱۰۰۰ \in A$ $-\sqrt{۵} \notin A$

۱۱-

الف) $x+y$ ب) ۱۳

۱۲-

$$۲x+۱۰^\circ = x+۳۰^\circ \Rightarrow x = ۲۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{D} = ۲(۲۰^\circ)+۱۰^\circ = ۵۰^\circ$$

$$۳y = ۲y+۴۰^\circ \Rightarrow y = ۴۰^\circ \Rightarrow \hat{E} = \hat{B} = ۳(۴۰^\circ) = ۱۲۰^\circ$$

$$۲z+۱ = z+۵ \Rightarrow z = ۴ \Rightarrow \overline{AB} = ۹$$

۱۳- الف)

شکل متوازی‌الاضلاع است: فرض

زاویه‌های مجاور مکمل هستند: حکم

ب)

$$\begin{cases} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ OA = OB \\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز}} \overset{\Delta}{A}OD \cong \overset{\Delta}{B}OC \Rightarrow AD = BC$$

۱۴- الف)

$$[-(\frac{۲}{۳})^{-۲}]^{-۱} = -(\frac{۲}{۳})^{۲} = -\frac{۴}{۹}$$

ب)

$$\frac{۱}{۴} = (-۲)^{-۲} \boxed{>} -۲^{-۲} = -\frac{۱}{۴} \qquad (\frac{۱}{۳})^{۵} \boxed{<} \frac{۱}{۳}$$

۱۵-

الف) $۵/۶۲۳ \times ۱۰^{۷}$ ب) $۷/۳۴ \times ۱۰^{-۶}$

۱۶- الف)

$$۱) \sqrt[۳]{۶۴} - ۲\sqrt[۳]{۸} = ۴-۴ = ۰$$

$$۲) -۴\sqrt{۱۲} \times ۲\sqrt{۳} = -۸\sqrt{۳۶} = -۴۸$$

ب)

$$۱) \frac{۴}{۵\sqrt{۲}} = \frac{۴}{۵\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۱۰} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۵}$$

$$۲) \frac{۱}{\sqrt[۳]{a}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{a}} \times \frac{\sqrt[۳]{a^۲}}{\sqrt[۳]{a^۲}} = \frac{\sqrt[۳]{a^۲}}{a}$$

کاربرگ ۱۴

۱-

چندجمله‌ای	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x, y
$-۵x^۲y^۳+xy^۵-۵$	۲	۵	۶
$۶x^۷y-۳x^۲y^۴+۳$	۷	۴	۸
$-\frac{۳}{۵}x^۲y^۳+۹y^۶x^۵$	۵	۶	۱۱
$۲x^۳y^۴+۳xy^۲-۵yx^۷$	۷	۴	۸
$۲y^۲x^۸-۳x^۴y^۳+۵x^۳y^۵$	۸	۵	۱۰
$۳x^۵y^۴+۹x^۲y^۴-۳xy^۳-۵$	۵	۴	۹

۲- ۱) حاصل‌ضرب داده شده را پیدا کرده و سپس جمله‌ها را برحسب درجه‌شان نسبت به x مرتب می‌کنیم:

$$(x^۳+x^۲-x^۴)(۲x^۶-۳x^۵)=۲x^۹+۲x^۸-۲x^{۱۰}-۳x^۸-۳x^۷+۳x^۹=۵x^۹-x^۸-۲x^{۱۰}-۳x^۷$$

مرتب‌سازی بر حسب توان‌های نزولی: $-۲x^{۱۰}+۵x^۹-x^۸-۳x^۷$

۲) ابتدا عبارت را ساده کرده و سپس مرتب می‌کنیم:

$$۵ab(۲a^۲-۳b^۳)-۶a^۲b(۳a^۲b^۲+۲ab^۴)+a(a^۴-a^۵)$$

$$=۱۰a^۳b-۱۵ab^۴-۱۸a^۴b^۳-۱۲a^۳b^۵+a^۵-a^۶$$

مرتب‌سازی برحسب توان‌های نزولی b: $-۱۲a^۳b^۵-۱۵ab^۴-۱۸a^۴b^۳+۱۰a^۳b+a^۵-a^۶$

۳- ۱) این دو ستون با هم برابرند.

a	$a^۲$	$-۱۰a$	$a^۲-۱۰a+۲۵$	$(a-۵)^۲$
-۳	۹	$+۳۰$	۶۴	۶۴
$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	۵	$\frac{۱۲۱}{۴}$	$\frac{۱۲۱}{۴}$
۰	۰	۰	۲۵	۲۵
۱	۱	-۱۰	۱۶	۱۶
$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۴}{۲۵}$	-۴	$\frac{۷۲۹}{۶۲۵}$	$\frac{۷۲۹}{۶۲۵}$

۲) $(a-۵)^۲=(a-۵)(a+۵)=a^۲-۵a-۵a+۲۵=a^۲-۱۰a+۲۵$

۳) اتحاد

۴- ۱) حاصل‌ضرب سمت چپ مساوی را به کمک ضرب پرانتزها حساب می‌کنیم و خواهیم دید که چندجمله‌ای به دست آمده با چندجمله‌ای سمت راست تساوی یکسان نیست. در نتیجه رابطهٔ تساوی داده شده هم اتحاد نیست.

$(x+۱)(x-۲)=x^۲-۲x+x-۲=x^۲-x-۲\neq x^۲+x=۲\Rightarrow$ رابطه اتحاد نیست.

۲) حاصل‌ضرب پرانتزهای سمت چپ تساوی را به دست آورده و می‌بینیم عبارت به دست آمده با عبارت سمت راست یکسان است پس رابطه اتحاد است.

$(x+\frac{۱}{x})(x-\frac{۱}{x})=x^۲-x\times\frac{۱}{x}+x\times\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲}=x^۲-۱+۱-\frac{۱}{x^۲}=x^۲-\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow$ رابطه اتحاد است.

۵-

۱) محیط $=۱۳a^۲m^۳$ (۱ جمله‌ای) $\begin{cases}\text{ضریب } ۱۳\\ \text{درجه } ۵\end{cases}$

۲) محیط $=(\frac{۳}{۴}\times۸m^۲\times۳)+۴m^۲+۴m^۲=۲۶m^۲$ (۱ جمله‌ای) $\begin{cases}\text{ضریب } ۲۶\\ \text{درجه } ۲\end{cases}$

۶-

۱) $\frac{۸m^۲\times۸m^۲}{۲}=۳۲m^۴$ (۱ جمله‌ای) $\begin{cases}\text{ضریب } ۳۲\\ \text{درجه } ۴\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\text{مساحت مستطیل } ۸ab\times۲ab=۱۶a^۲b^۴\\ \text{مساحت دایره } ab\times ab\times۳=۳a^۲b^۲\end{cases}$ مساحت کل $=۱۶a^۲b^۴-۳a^۲b^۲\Rightarrow$ ۱جمله‌ای نیست

۳) مساحت متوازی‌الاضلاع $=۲۰xy\times۱۲xy=۲۴۰\times x^۲y^۲$ (۱ جمله‌ای) $\begin{cases}\text{ضریب } ۲۴۰\\ \text{درجه } ۴\end{cases}$

۷-

$(x+y)^۲=(x+y)(x+y)=x^۲+xy+xy+y^۲=x^۲+۲xy+y^۲$

-۸

۱) $(\frac{۲}{۳}x-۶)^۲=(\frac{۲}{۳}x)^۲-۲(\frac{۲}{۳}x)(۶)+۶^۲=\frac{۴}{۹}x^۲-۸x+۳۶$

۲) $(x-\frac{۱}{x})^۲=(x)^۲-۲(x)(\frac{۱}{x})+(\frac{۱}{x})^۲=x^۲-۲+\frac{۱}{x^۲}$

۳) $(۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲})^۲=(۲\sqrt{۳})^۲+۲\times۲\sqrt{۳}\times۳\sqrt{۲}+(۳\sqrt{۲})^۲=۱۲+۱۲\sqrt{۶}+۱۸=۳۰+۱۲\sqrt{۶}$

-۹

۱) $x^۲+x+\frac{۱}{۴}=(x+\frac{۱}{۲})^۲$

۲) $x^۳+۴x+۴x^۲=x(x^۲+۴+۴x)=x(x+۲)^۲$

۳) $۴a^۲-۲۴a+۳۶=۴(a^۲+۶a+۹)=۴(a+۳)^۲$

۴) $x^۴+۱۰x^۲+۲۵=(x+۵)^۲$

کاربرگ ۱۵

۱-

۱) $(۲+a)(۲-a)=۴-a^{۲}$

۲) $(x-۶)(x+۶)=x^{۲}-۳۶$

۳) $(۶x-۵)(۶x+۵)=۳۶x^{۲}-۲۵$

۴) $(۴x+۹y)(۴x-۹y)=۱۶x^{۲}-۸۱y^{۲}$

۲-

۱) $x^{۲}-۲$ ۲) $۵-۴a^{۶}$

۳) $۱۲-x^{۴}$ ۴) $۳۶a^{۴}-۴۹b^{۶}$

۳-

۱) $(a-۶)(a+۶)$ ۲) $(۱۲-x)(۱۲+x)$ ۳) $(۲-m)(۲+m)$

۴- ابتدا حجم استخر را حساب می‌کنیم:

$$V=(x+۵)(x+۵)(x^{۲}+۲۵)$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج V را ساده می‌کنیم. حاصل عبارت $(x-۵)(x+۵)$ برابر $x^{۲}-۲۵$ است.

پس حجم استخر عبارت است از:

$$V=(x^{۲}-۲۵)(x^{۲}+۲۵)=(x^{۲})^{۲}-۲۵^{۲}=x^{۴}-۶۲۵$$

۵- ۱) به کمک فاکتورگیری عبارت $۳x^{۳}-۱۲x$ را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۳x^{۳}-۱۲x=۳x(x^{۲}-۴)=۳x(x-۲)(x+۲)$$

۲) عبارت $x^{۴}-۱$ را به‌صورت $(x^{۲})^{۲}-۱$ بازنویسی می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$x^{۴}-۱=(x^{۲}-۱)(x^{۲}+۱)$$

از طرفی عبارت $x^{۲}-۱$ طبق اتحاد مزدوج برابر $(x-۱)(x+۱)$ است. پس می‌توان نوشت:

$$x^{۴}-۱=(x-۱)(x+۱)(x^{۲}+۱)$$

۳) به کمک فاکتورگیری عبارت داده شده را به‌صورت $۲d(۴۹c^۲ - ۲۵d^۲)$ بازنویسی می‌کنیم:

$$۹۸c^۲d - ۵۰d^۳ = ۲d(۴۹c^۲ - ۲۵d^۲) = ۲d((۷c)^۲ - (۵d)^۲) = ۲d(۷c - ۵d)(۷c + ۵d)$$

۶- ۱) به جای آن‌که ۱۰۱ را در خودش ضرب کنیم و حاصل را به دست آوریم، حاصل را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$۱۰۱^۲ = (۱۰۰+۱)^۲ = ۱۰۰^۲ + ۲\times۱۰۰\times۱ + ۱^۲ = ۱۰۰۰۰ + ۲۰۰ + ۱ = ۱۰۲۰۱$$

۲) $۹۹۹^۲ = (۱۰۰۰-۱)^۲ = ۱۰۰۰^۲ - ۲\times۱۰۰۰\times۱ + ۱^۲ = ۱۰۰۰۰۰۰ - ۲۰۰۰ + ۱ = ۹۹۸۰۰۱$

۳) توجه کنید که $۱۰۰۰۲ = ۱۰۰۰۰ + ۲$ و $۹۹۹۸ = ۱۰۰۰۰ - ۲$ پس به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$۱۰۰۰۲\times۹۹۹۸ = (۱۰۰۰۰+۲)(۱۰۰۰۰-۲) = (۱۰۰۰۰)^۲ - ۲^۲ = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ - ۴ = ۹۹۹۹۹۹۹۶$$

۷-

۱) $۳۶x^۲ + \frac{۷۴}{۵}x + \frac{۶}{۵}$

۲) $x^۴ + x^۲ + \frac{۲}{۹}$

۳) $x^۲ - \sqrt{۳}x - ۶$

۴) $۱۶x^۴ - ۴۴x^۲y + ۳۰y^۲$

۸-

۱) $(x-۱)(x-۷)$

۲) $(y+۴)(y-۳)$

۳) $(t+۳)(t-۵)$

۹-

۱) $-(x^۲ + x - ۳۰) = -(x+۶)(x-۵)$

۲) $۵(x^۲ - ۵x - ۶) = ۵(x-۶)(x+۱)$

۳) $b(y^۲ - ۵y - ۵۰) = b(y-۱۰)(y+۵)$

۱۰-

مساحت مربع: $(x+۲)^۲ = x^۲ + ۴ + ۴x$ (مربع دوجمله‌ای)

مساحت مستطیل: $(x+۸)(x+۴) = x^۲ + ۱۲x + ۳۲$ (جمله مشترک)

مساحت هاشورخورده: $x^۲ + ۱۲x + ۳۲ - x^۲ - ۴ - ۴x = ۸x + ۲۸$

-۱۱

۱) $\underbrace{(a+۳)(a-۳)}_{a^۲-۹}(a^۲+۶)=(a^۲-۹)(a^۲+۶)=a^۴-۳a^۲-۵۴$

۲) $(۲x-۵)^۲(\underbrace{۴x^۲+۲۰x+۲۵}_{(۲x+۵)^۲})\Rightarrow(۲x-۵)^۲(۲x+۵)^۲=[(۲x-۵)(۲x+۵)]^۲=(۴x^۲-۲۵)^۲$

$=۱۶x^۲+۶۲۵-۲۰۰x^۲$

۳) $\underbrace{(x+۳)(x+۵)}_{(x^۲+۸x+۱۵)}(x^۲+۸x-۱۵)\Rightarrow(\underbrace{x^۲+۸x}_{A}\underbrace{+۱۵}_{B})(\underbrace{x^۲+۸x}_{A}\underbrace{-۱۵}_{-B})=(x^۲+۸x)^۲-۲۲۵$

$=x^۴+۶۴x^۲+۱۶x^۳-۲۲۵$

۴) $\underbrace{(x-۳)(x+۲)}_{x^۲-x-۶}(x^۲+x+۶)=(x^۲-(x+۶))(x^۲+(x+۶))$

$\Rightarrow x^۴-(x^۲+۱۲x+۳۶)=x^۴-x^۲-۱۲x-۳۶$

کاربرگ ۱۶

۱-

۱) $x = y + ۸ \Rightarrow x = y + p, p = ۸ > ۰ \Rightarrow x > y$

۲) $x + ۴ = y \Rightarrow y = x + p, p = ۴ \Rightarrow x < y$

۳) $x - ۶ = y + ۵ \Rightarrow x = y + ۵ + ۶ \Rightarrow x = y + ۱۱ \Rightarrow x = y + p, p = ۱۱ > ۰ \Rightarrow x > y$

۴) $۵x = ۲y, x, y > ۰ \Rightarrow y = \frac{۵}{۲}x \Rightarrow y = ۲/۵x \Rightarrow y = x + ۱/۵x$

$\Rightarrow y = x + p, p = ۱/۵x > ۰ \Rightarrow y > x$

۵) $۴x - ۱ = ۸y + ۳, x, y > ۰ \Rightarrow ۴x = ۸y + ۳ + ۱ \Rightarrow x = ۲y + ۱ \Rightarrow x = y + y + ۱$

$\Rightarrow x = y + p, p = y + ۱ > ۰ \Rightarrow x > y$

۶) $x - y = ۵ \Rightarrow x = y + ۵, x = y + p, p = ۵ > ۰ \Rightarrow x > y$

۲-

۱) $x = y + ۴ \Rightarrow x = y + p, p = ۴ > ۰ \Rightarrow x > y$

۲) $x - ۳ = y - ۲ \Rightarrow x = y - ۲ + ۳ = y + ۱ \Rightarrow x = y + p, p = ۱ > ۰ \Rightarrow x > y$

۳) $x + ۴ = y - ۵ \Rightarrow x + ۴ + ۵ = y \Rightarrow x + ۹ = y \Rightarrow y = x + p, p = ۹ > ۰ \Rightarrow x < y$

۴) $۳x - ۲ = ۳y + ۷ \Rightarrow ۳x = ۳y + ۷ + ۲ \Rightarrow ۳x = ۳y + ۹ \xrightarrow{\div ۳} x = y + ۳$

$\Rightarrow x = y + p, p = ۳ > ۰ \Rightarrow x > y$

۵) $۴x - ۳ = ۴(y - ۴) \Rightarrow ۴x - ۳ = ۴y - ۱۶ \Rightarrow ۴x - ۳ + ۱۶ = ۴y$

$\Rightarrow ۴x + ۱۳ = ۴y \xrightarrow{\div ۴} x + \frac{۱۳}{۴} = y = x + p, p = \frac{۱۳}{۴} > ۰ \Rightarrow x < y$

۶) $\frac{x - y}{۳} = -۳ \xrightarrow{\times ۳} x - y = -۹ \Rightarrow x + ۹ = y \Rightarrow y = x + p, p = ۹ > ۰ \Rightarrow x < y$

۳-

۱) $x < ۰, y, z > ۰ \Rightarrow xyz < ۰$

۲) $x < ۰ \Rightarrow x^۲ > ۰, y, z > ۰ \Rightarrow x^۲yz > ۰$

۳) $x < ۰, y, z > ۰ \Rightarrow z^۲ > ۰ \Rightarrow \frac{xy}{z^۲} < ۰$

۴) $x < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x} < ۰, y > ۰ \Rightarrow \sqrt{y} > ۰ \Rightarrow \frac{\sqrt{y}}{x} < ۰ \Rightarrow -\frac{\sqrt{y}}{x} > ۰$

۵) $x<0 \Rightarrow |x|>0, x^3<0 \Rightarrow \frac{|x|}{3x^3}<0$

۶) $x<0 \Rightarrow x^2>0, y>0 \Rightarrow y^3>0 \Rightarrow x^2y^3>0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}x^2y^3<0$

۷) $x<0 \Rightarrow x^3<0, y>0 \Rightarrow y^2>0 \Rightarrow y^2-x^3>0, z>0 \Rightarrow 3z>0 \Rightarrow \frac{y^2-x^3}{3z}>0$

۸) $x<0, y>0 \Rightarrow -y<0 \Rightarrow x-y<0 \Rightarrow (x-y)^2>0$

۴- ۱) $4x+\frac{y}{3}\geq 17$

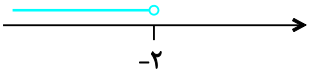
۲) عدد موردنظر را x در نظر می‌گیریم $\Leftarrow 4x+5<4$

۳) عدد موردنظر را x در نظر می‌گیریم $\Leftarrow 5x>3x+5$

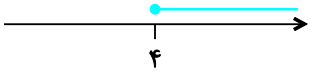
۴) عدد موردنظر را x در نظر می‌گیریم $\Leftarrow \frac{x}{2}+2x<5$

۵- در هر قسمت معلوم‌ها را در یک طرف نامعادله و مجهول‌ها را نیز در طرف دیگر نامعادله جمع کرده و نامعادله‌ها را حل می‌کنیم.

۱) $x+5<3 \Rightarrow x<3-5 \Rightarrow x<-2$

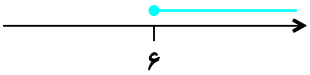


۲) $3x+4\geq 16 \Rightarrow 3x\geq 16-4 \Rightarrow 3x\geq 12 \xrightarrow{\div 3} x\geq 4$

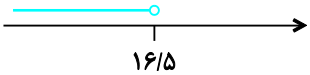


۳) $5x-2\leq 10x-32 \Rightarrow 5x-10x\leq -32+2$

$\Rightarrow -5x\leq -30 \xrightarrow{\div(-5)} x\geq 6$



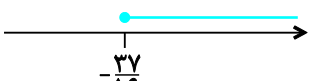
۴) $7(x-\frac{3}{7})>9(x-4) \Rightarrow 7x-3>9x-36 \Rightarrow 7x-9x>-36+3$



$\Rightarrow -2x>-33 \xrightarrow{\div(-2)} x<\frac{33}{2} \Rightarrow x<16/5$

۵) $\frac{12x+3}{4}\geq\frac{5x-7}{3} \xrightarrow{\text{طرفین و وسطین}} 3(12x+3)\geq 4(5x-7)$

$\Rightarrow 36x+9\geq 20x-28 \Rightarrow 36x-20x\geq -28-9 \Rightarrow 16x\geq -37 \xrightarrow{\div(16)} x\geq -\frac{37}{16}$



۶- ۱) با قرار دادن $x=-۱۰$ در نامعادله به نامساوی $۱۲<(-۱۰)-۲۰$ یا به‌طور معادل $۱۲<۳۰$ می‌رسیم که درست است. بنابراین $x=-۱۰$ جوابی از نامعادله است. با قرار دادنی $x=۱۰$ در نامعادله به نامساوی $۱۲<۱۰-۲۰$ یا به‌طور معادل $۱۲<۱۰$ می‌رسیم که نادرست است. بنابراین $x=۱۰$ جوابی از نامعادله نیست.

۲) با رویکردی مشابه قسمت (الف) مقادیر $x=۰$ و $x=-۵$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$x=-۵: ۱۶-(-۵)^۲<۰ \Rightarrow -۹<۰$ درست

$x=۰: ۱۶-۰^۲<۰ \Rightarrow ۱۶<۰$ نادرست

بنابراین $x=-۵$ جواب نامعادله است ولی $x=۰$ جوابی از نامعادله نیست.

۷- نمرهٔ چهارم گیلدا را با x نمایش می‌دهیم. نمرات گیلدا باید بیش‌تر از ۱۷ باشد. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۱۹/۵+۱۵+۱۷/۵+x}{۴}>۱۷ \Rightarrow \frac{x+۵۲}{۴}>۱۷ \xrightarrow{\times ۴} x+۵۲>۶۸ \xrightarrow{-۵۲} x>۱۶$$

پس نمرهٔ آزمون چهارم گیلدا باید عددی بین ۱۶ تا ۲۰ باشد.

۸- طبق فرض مسئله مجموع طول، عرض و ارتفاع جعبه باید کوچک‌تر یا مساوی $۳۲۵cm$ باشد در نتیجه می‌توان نوشت:

$$x+x+۱۴۰\le ۳۲۵ \Rightarrow ۲x+۱۴۰\le ۳۲۵ \xrightarrow{-۱۴۰} ۲x\le ۱۸۵ \xrightarrow{\div ۲} x\le ۹۲/۵$$

در نتیجه ابعاد قاعدهٔ جعبه حداکثر باید ۹۲/۵ سانتی‌متر باشد.

۹- می‌دانیم درآمد فروش یک عدد کالا برابر با ۹۰ هزار تومان است. در نتیجه درآمد حاصل از فروش n عدد کالا برابر با $R=۹۰\times n$ هزار تومان خواهد بود. از طرفی می‌دانیم اگر درآمد کارخانه، از هزینهٔ آن بیش‌تر شود کارخانه سود خواهد کرد، در نتیجه:

$$۹۰n>۶۱n+۸۷۰ \xrightarrow{-۶۱n} ۲۹n>۸۷۰ \xrightarrow{\div ۲۹} n>۳۰$$

بنابراین در صورت فروش بیش از ۳۰ عدد محصول (حداقل ۳۱ واحد) کارخانه به سودهی می‌رسد.

کاربرگ ۱۷

۱- ۱)

زمان x (ثانیه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
مسافت y (متر)	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵

۲) ۵×زمان = مسافت

۳) $۵ \times a = ۵a$

۴) ۱ کیلومتر طی می‌کند. $۲۰۰ \times ۵ = ۱۰۰۰$

۵) همه نقاط بر روی ۱ خط قرار می‌گیرند که معادله آن $y = ۵x$ است.

۲-

۱) $y - ۴x = ۲ \Rightarrow y = ۲ + ۴x$

x	۰	۱
y	۲	۶

۲) $y = -۳x$

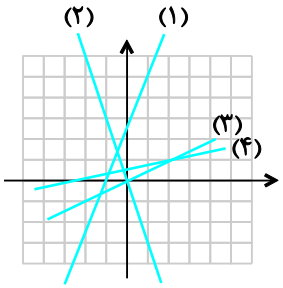
x	۰	
y	۰	-۳

۳) $x - ۲y = ۰ \Rightarrow x = ۲y$

x	۰	۲
y	۰	۱

۴) $y = \frac{۲}{۵}x + \frac{۱}{۵}$

x	۰	۲
y	$\frac{۱}{۵}$	۱



۳- در هر قسمت با قرار دادن مقادیر عددی به جای x و y درستی معادله را بررسی کرده و بودن یا نبودن نقطه روی خط را تعیین می‌کنیم.

۱) توجه کنید که مقدار عددی عبارت $۲x + y$ به ازای $x = ۱$ و $y = ۲$ برابر است با: $۲ \times ۱ + ۲ = ۴$. پس این نقطه روی خط موردنظر قرار دارد.

۲) به جای x و y مقدارهای مختلف قرار می‌دهیم به طوری‌که در معادلهٔ خط صدق کنند:

$x = ۰ \Rightarrow ۰ + \frac{y}{۲} = ۳ \Rightarrow \frac{y}{۲} = ۳ \Rightarrow y = ۶$. نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۶ \end{bmatrix}$ روی خط است.

$y=۰ \Rightarrow x+\frac{۰}{۲}=۳ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow$ نقطهٔ $\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}$ روی خط است.

$x=۲ \Rightarrow ۲+\frac{y}{۲}=۳ \Rightarrow \frac{y}{۲}=۱ \Rightarrow y=۲$ نقطهٔ $\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}$ روی خط است.

۴- ۱) کافیست در معادلهٔ داده شده به جای x مقدار عددی ۳ را قرار داده و مقدار عددی y را محاسبه می‌کنیم.

$$x=۳ \Rightarrow y=۳\times ۳-۲ \Rightarrow y=۷ \Rightarrow \text{مختصات نقطه} = \begin{bmatrix}۳\\۷\end{bmatrix}$$

۲) کافیست در معادلهٔ $۲y-\frac{x}{۳}=۱$ به جای y مقدار عددی ۲- را قرار داده و x را به دست آوریم.

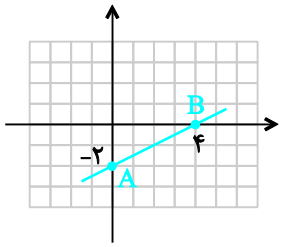
$$۲\times(-۲)-\frac{x}{۳}=۱ \Rightarrow -۴-\frac{x}{۳}=۱ \Rightarrow -\frac{x}{۳}=۵ \Rightarrow x=-۱۵ \Rightarrow \text{مختصات نقطه} = \begin{bmatrix}-۱۵\\-۲\end{bmatrix}$$

۵- ۱) برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ برخورد با محور طول‌ها y را برابر صفر قرار داده و x را به دست می‌آوریم. هم‌چنین برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ برخورد با محور عرض‌ها x را برابر صفر قرار داده و y را محاسبه می‌کنیم.

محل برخورد با محور x ها: $y=۰ \Rightarrow ۰=۳x+۱۵ \Rightarrow ۳x=-۱۵ \Rightarrow x=-۵ \Rightarrow$ مختصات نقطه $= \begin{bmatrix}-۵\\۰\end{bmatrix}$

محل برخورد با محور y ها: $x=۰ \Rightarrow y=۳\times ۰+۱۵ \Rightarrow y=۱۵ \Rightarrow$ مختصات نقطه $= \begin{bmatrix}۰\\۱۵\end{bmatrix}$

۲) محل برخورد خط با محورها را به دست آورده و سپس به کمک رسم شکل مساحت به دست می‌آوریم:



$$x=۰ \Rightarrow ۰-۲y=۴ \Rightarrow -۲y=۴ \Rightarrow y=-۲ \Rightarrow A=\begin{bmatrix}۰\\-۲\end{bmatrix}$$

$$y=۰ \Rightarrow x-۲\times ۰=۴ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow B=\begin{bmatrix}۴\\۰\end{bmatrix}$$

$$S_{\Delta OAB}=\frac{OB\times OA}{۲} \Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{۴\times ۲}{۲}=۴$$

۶- ۱) ابتدا معادلهٔ خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲y=۳x+۶ \xrightarrow{\div ۲} y=\frac{۳}{۲}x+۳$$

از معادلهٔ بالا می‌توان فهمید این خط دارای شیب $\frac{۳}{۲}$ و عرض از مبدأ ۳ می‌باشد.

۲) ابتدا معادلهٔ خط را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$-\frac{y}{۳}=-\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۱۲} \xrightarrow{\times -۳} y=\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۴}$$

از معادلهٔ بالا می‌توان فهمید این خط دارای شیب $\frac{۳}{۲}$ و عرض از مبدأ $\frac{۱}{۴}$ می‌باشد.

۳) ابتدا معادلهٔ خط را به‌صورت $۳y=x$ می‌نویسیم. حال با تقسیم دو طرف تساوی بر ۳ خواهیم داشت $y=\frac{۱}{۳}x$ که در این حالت شیب خط برابر $\frac{۱}{۳}$ و عرض از مبدأ آن برابر صفر است. توجه کنید که این خط، خطی گذرنده از صفر است.

۷- ۱) شیب خط برابر است با:

$$m=\frac{\text{تفاضل y ها}}{\text{تفاضل x ها}}=\frac{۷-(-۶)}{۲-۳}=\frac{۱۳}{-۱}=-۱۳$$

۲) شیب خط برابر است با:

$$m=\frac{\text{تفاضل y ها}}{\text{تفاضل x ها}}=\frac{۳b-a}{۶b-۲a}=\frac{۳b-a}{۲(۳b-a)}=\frac{۱}{۲}$$

۳) خط داده شده از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۶\\۵\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۳\\۰\end{bmatrix}$ عبور کرده پس شیب خط برابر است با:

$$m=\frac{\text{تفاضل y ها}}{\text{تفاضل x ها}}=\frac{۵-۰}{۶-(-۳)}=\frac{۵}{۹}$$

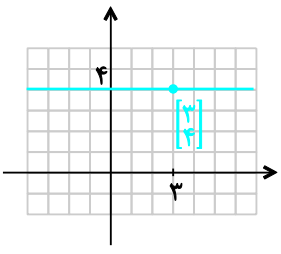
۸-

۱) $y=-۳x+۳$

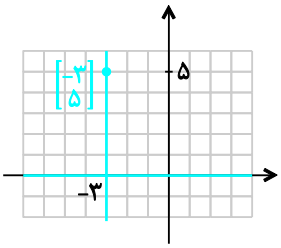
۲) شیب $=\frac{-۴-۰}{۲-۰}=\frac{-۴}{۲}=-۲$

۳) $y=۴x+b \xrightarrow[۰=۸+b\Rightarrow b=-۸\Rightarrow y=۴x-۸]{\begin{vmatrix}۲\\۰\end{vmatrix}}$

۹- ۱) با توجه به شکل معادلهٔ خط برابر است با: $y=۴$



۲) با توجه به شکل معادلهٔ خط برابر است با $x = -۳$



۱۰- ۱) خط مورد نظر با خط $y = -۳x + ۱۲$ موازی است پس شیب این خط هم برابر ۳- می‌باشد درنتیجه مسئله به یافتن معادلهٔ خطی با شیب ۳- و عرض از مبدأ ۷ تبدیل می‌شود. پس معادلهٔ خط به‌صورت $y = -۳x + ۷$ می‌باشد.

۲) ابتدا خط $۴x + ۶y + ۵ = ۰$ را به شکل $y = -\frac{۲}{۳}x - \frac{۵}{۶}$ می‌نویسیم. پس این خط دارای شیبی برابر $-\frac{۲}{۳}$ است. از آن‌جا که دو خط موازی دارای شیب یکسانی هستند کافی است معادلهٔ خطی با شیب $-\frac{۲}{۳}$ را بیابیم که از نقطهٔ $(۵,۲)$ می‌گذرد.

$$y - ۲ = -\frac{۲}{۳}(x - ۵)$$

کاربرگ ۱۸

۱- کافی است در هر مورد به جای x و y مقادیر داده شده را قرار دهیم. اگر مقادیر داده شده در هر دو معادله صدق کنند، می‌توان گفت این مقادیر جواب دستگاه معادلات هستند.

با قرار داردن مقدار ۳ به جای x و y معادلهٔ اول برقرار می‌شود اما معادلهٔ دوم برقرار نخواهد شد.

$$۲\times۳-۵\times۳=-۹\neq-۲$$

با قرار دادن مقدار ۴ به جای x و مقدار ۲ به جای y هر دو معادله برقرار خواهد شد.

$$x=۴,y=۲\Rightarrow۲\times۴-۵\times۲=-۲ \qquad x=۴,y=۲\Rightarrow۴+۲=۶$$

بنابراین می‌توان فهمید $x=۴$ و $y=۲$ جواب این دستگاه معادلات است.

۲- ۱) از آن‌جایی که ضریب x در معادلهٔ اول دو برابر ضریب x در دومین معادله است می‌توان فهمید با ضریب معادلهٔ دوم در عدد ۲- به دستگاه معادله‌های زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases}۴x-۷y=-۳\\-۴x-۶y=-۱۰\end{cases}$$

حال مشاهده می‌شود با جمع دو معادلهٔ فوق متغیر x حذف خواهد شد:

$$-۱۳y=-۱۳\Rightarrow y=۱$$

۲) حال با جایگذاری $y=۱$ در معادلهٔ اول مقدار x برابر ۱ خواهد شد. در نتیجه $x=۱$ و $y=۱$ جواب دستگاه معادلات است.

۳- ۱) با توجه به دومین معادله، به دست آوردن y برحسب x بسیار ساده‌تر از محاسبهٔ x برحسب y به نظر می‌رسد. در نتیجه از معادلهٔ دوم y را برحسب x تعیین می‌کنیم:

$$۵x-y=۹\Rightarrow y=۵x-۹$$

۲) با جایگزینی مقدار $۵x-۹$ به جای y در اولین معادله به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$۳x-۲(۵x-۹)=۷\Rightarrow-۷x+۱۸=۷\Rightarrow-۷x=-۱۱\Rightarrow x=\frac{۱۱}{۷}$$

حال با جایگذاری $x=\frac{۱۱}{۷}$ در تساوی $y=۵x-۹$ مقدار y برابر $\frac{-۸}{۷}$ است.

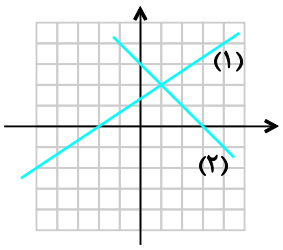
۴-

$y-۴x=-۲$

x	۰	۱
y	-۲	۲

$x+y=۳$

x	۰	۱
y	۳	۲



۵-

۱) $y-۳=۰\Rightarrow y=۳$

$x+۵(۳)=۲۴\Rightarrow x+۱۵=۲۴\Rightarrow x=۹$

۲) $\frac{۱}{۵}x-\frac{۱}{۴}y=۱\xrightarrow{\times ۲۰}۴x-۵y=۲۰\xrightarrow{\times ۴}\begin{cases}۴x-۵y=۲۰\\ y-x=-۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{۴x}-۵y=۲۰\\ \cancel{-۴x}+۴y=-۲۸\end{cases}$

$-y=-۸\Rightarrow y=۸, x=۱۵$

۳) $\begin{cases}-x+y=-۴\\ ۴x+۴y=۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{-۴x}+۴y=-۱۶\\ \cancel{۴x}+۴y=۸\end{cases}$

$۸y=-۸\Rightarrow y=-۱\Rightarrow x=۳$

۶- ابتدا معادلهٔ اول دستگاه را در عدد ۵- ضرب می‌کنیم تا به معادلهٔ زیر برسیم:

$\begin{cases}-۱۰x+۵y=-۵\\ ۱۰x-۵y=۳\end{cases}$

اکنون اگر معادلهٔ دوم را با معادلهٔ اول جمع کنیم به تساوی $۰=-۲$ می‌رسیم. روشن است که این تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست. بنابراین هیچ دو عدد حقیقی x و y وجود ندارد که به‌طور همزمان در معادلات بالا صدق کند. پس دستگاه معادلات جواب ندارد.

۷- ابتدا معادلهٔ اول دستگاه را در ۲- ضرب می‌کنیم تا به دستگاه $\begin{cases}۲x-۶y=-۱۶\\ ۲x-۶y=-۱۶\end{cases}$ برسیم. همان‌طور که می‌بینید هر دو معادله یکسان هستند و در نتیجه هر جواب از معادلهٔ اول جوابی از دومین معادله است. می‌دانیم بی‌نهایت عدد صحیح x و y وجود دارند که در تساوی $-x+۳y=۸$ صدق کنند. در نتیجه می‌توان فهمید این دستگاه معادلات بی‌نهایت جواب دارد.

۸- ابتدا مختصات تقاطع دو خط را خواهیم یافت. برای این امر به حل دستگاه زیر می‌پردازیم:

$$\begin{cases} ۳x - y = ۸ \\ -۴x + y = -۱۱ \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق خواهیم داشت: $x = ۳, y = ۱$

حال باید معادلهٔ خطی با شیب ۳- را بیابیم که از نقطهٔ $(۳,۱)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط برابر است با:

$$y - ۱ = -۳(x - ۳)$$

۹- قیمت پارچهٔ حریررا با y و قیمت پارچهٔ کتان را با x نشان می‌دهیم. با توجه به فرض مسئله بـه دسـتگاه $\begin{cases} y = ۳x \\ ۱/۵y + ۴x = ۸۵ \end{cases}$ می‌رسیم. با حل دستگاه، مقدار x برابر ۱۰ خواهد شد. بنابراین قیمت یک متر پارچهٔ حریر برابر ۳۰ هزار تومان است.

۱۰- فرض می‌کنیم قیمت هر بلیت کودکان A هزار تومان و قیمت هر بلیت بزرگسال B هزار تومان باشد. در نتیجه می‌توان نوشت:

شب اول $\Rightarrow ۱۷۵A + ۱۰۰B = ۱۲۲۵$

شب دوم $\Rightarrow ۳۱۶A + ۲۰۰B = ۲۳۴۸$

اکنون باید این دستگاه معادلات را حل کنیم که با حل آن خواهیم داشت:

$B = ۷$ یعنی قیمت بلیت بزرگسالان ۷ هزار تومان است.

۱۱- سن فعلی مهسا را با x و سن فعلی مسعود را با y نشان می‌دهیم. در نتیجه ۲ سـال پـیش، سـن مهسـا برابر $x - ۲$ و سن مسعود برابر $y - ۲$ بوده است. حال طبق فرض مسئله می‌توان نوشت:

$$x - ۲ = ۹(y - ۲) \Rightarrow x - ۹y = -۱۶$$

همچنین طبق فرض مسئله در حال حاضر سن مهسا ۷ برابـر سـن مسـعود اسـت. پـس مـی‌تـوان نوشـت:

$$x = ۷y$$

۱) حال برای حساب کردن سن مهسا و مسعود به دستگاه زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} x - ۹y = -۱۶ \\ x = ۷y \end{cases}$$

با جایگذاری دومین معادله در معادلهٔ اول مقدار y برابر ۸ و در نتیجـه مقـدار x برابـر ۵۶ خواهـد بـود. بنابراین مهسا ۵۶ ساله و مسعود ۸ ساله است.

۲) پس از گذشت t سال، سن مهسا برابر $۵۶+t$ و سن مسعود برار $۸+t$ می‌باشد. اکنون باید مقدار t را چنان بیابیم که معادلهٔ $۵۶+t=۵(۸+t)$ برقرار شود که جواب آن $t=۴$ می‌باشد، یعنی زمانی‌که مهسا ۶۰ ساله و مسعود ۱۲ ساله می‌باشد.

۱۲- فرض کنید طول مستطیل برابر t و عرض آن برابر a باشد. در این صورت معادلات زیر برقرارند.

$$t=۴a-۱\,,\,۲(a+t)=۲۸\Rightarrow a+t=۱۴$$

حال با دستگاه این معادلات، طول و عرض مستطیل را محاسبه کرده و سپس مساحت را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} a+t=۱۴ \xrightarrow{\text{جاگذاری}} a+۴a-۱=۱۴\Rightarrow ۵a=۱۵\Rightarrow a=۳ \\ t=۴a-۱ \xrightarrow{a=۳} t=۴\times ۳-۱\Rightarrow t=۱۱ \end{cases}$$

پس طول مساحت برابر ۱۱ واحد و عرض آن برابر ۳ واحد است. در نتیجه مساحت مستطیل برابر $۳\times ۱۱=۳۳$ واحد می‌باشد.

۱۳-

$$M+N=۹۰\ ,\ M=۳N+۱۰$$

$$\Rightarrow \overset{\times(-۱)}{\begin{cases} M+N=۹۰ \\ M-۳N=۱۰ \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} M+N=۹۰ \\ -M+۳N=-۱۰ \end{cases}$$

$$۴N=۸۰\Rightarrow N=۲۰\,,M=۷۰$$

۱۴-

$$۲m+n-۸=۰\ ,\ m-۳n+۱۰=۰$$

$$\Rightarrow \overset{\times ۳}{\begin{cases} ۲m+n=۸ \\ m-۳n=-۱۰ \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} ۶m+۳n=۲۴ \\ m-۳n=-۱۰ \end{cases}$$

$$۷m=۱۴\Rightarrow m=۲,n=۴$$

کاربرگ ۱۹

۱-

$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{۳}}{(a+b)^{۲}}$ صورت چندجمله‌ای جبری نیست.

$\frac{-۳۸x}{(\sqrt{x})^{۳}}$ مخرج چندجمله‌ای جبری نیست.

$\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{۷}}$ صورت چندجمله‌ای جبری نیست.

$\frac{|x+y|}{۲}$ صورت چندجمله‌ای جبری نیست. عبارت داخل قدرمطلق خروجی مشخصی ندارد.

بقیهٔ عبارت‌ها گویا هستند.

۲-

x	-۵	۷	$\frac{۳}{۴}$	-۲	۱	۰
$\frac{۲+x}{۴-x}$	$-\frac{۱}{۳}$	-۳	$\frac{۱۱}{۱۳}$	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$
$\frac{۲x+۴}{۵x+۱}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲۲}{۱۹}$	۰	۱	۴
$\frac{-۳}{x+۶}$	-۳	$-\frac{۳}{۱۳}$	$-\frac{۴}{۹}$	$-\frac{۳}{۴}$	$-\frac{۳}{۷}$	$-\frac{۱}{۲}$

۳-

۱) $۵x-۱۰=۰ \Rightarrow ۵x=۱۰ \Rightarrow x=۲$

۲) $x^{۲}-۱۶=۰ \Rightarrow x^{۲}=۱۶ \Rightarrow x=\pm ۴$

۳) $x^{۲}+۹=۰$ این عبارات به ازای همه مقادیر تعریف می‌شود.

۴) $x^{۲}+۵x+۶=۰ \Rightarrow (x+۲)(x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲ \\ x=-۳ \end{cases}$

۴-

۱) $\frac{(x+۸)^{\cancel{۲}}}{(x+۲)\cancel{(x+۸)}}=\frac{x+۸}{x+۲}$

۲) $\frac{\overset{۵}{\cancel{۲۵}}x^{۲}}{\cancel{۵x}(۲-y)}=\frac{۵x}{۲-y}$

۳) $\frac{\cancel{(x+۲)}(x+۱۰)}{(x-۹)\cancel{(x+۲)}}=\frac{x+۱۰}{x-۹}$

۴) $\frac{y\cancel{(۳x+y)}}{۲\cancel{(۳x+y)}}=\frac{y}{۲}$

۵) $\frac{\cancel{(۵x-۶y)}(۵x+۶y)}{۲\cancel{(۵x-۶y)}}=\frac{۵x+۶y}{۲}$

۵-

$\frac{x+۳}{x-۴}=\frac{-x+۳}{-x+۴}$ ، $\frac{x+۳}{x+۴}=\frac{-x-۳}{-x-۴}$ ، $\frac{۳-x}{-x-۴}=\frac{x-۳}{x+۴}$

$\frac{-x+۳}{x+۴}=\frac{x-۳}{-x-۴}$ ، $\frac{-x-۳}{x+۴}=\frac{x+۳}{-x-۴}$

۶-

۱) $\frac{x+۱}{\square}=\frac{(x+۱)\cancel{(x-۱)}}{x^{۲}\cancel{(x-۱)}}\Rightarrow \square\times\cancel{(x+۱)}=x^{۲}\cancel{(x+۱)}\Rightarrow \square=x^{۲}$

۲) $\frac{\cancel{x-۵}}{x+۴}=\frac{\cancel{(x-۵)}(x+۵)}{\square}\Rightarrow \square=(x+۵)(x+۴)$

۷- ابتدا مساحت هر یک از دو شکل را حساب می‌کنیم:

مساحت مستطیل هاشورخورده $=x(x+۲)$

مساحت مستطیل بزرگ $=۲x(۴x+۱۰)$

نسبت مساحت کوچک (هاشورخورده) به مساحت مستطیل بزرگ برابر است با:

$\frac{x(x+۲)}{۲x(۴x+۱۰)}=\frac{x(x+۲)}{۴x(۲x+۵)}=\frac{x+۲}{۴(۲x+۵)}$

۸-

$\frac{۳x+۴}{-۴-۳x}=\frac{۳x+۴}{-(۳x+۴)}=-۱$

$\frac{۸x^{۲}+۱۶x}{۴x(x+۲)}=\frac{۸x(x+۲)}{۴x(x+۲)}=۲$

$\frac{-۶x-۳}{۴x+۲}=\frac{-۳(۲x+۱)}{۲(۲x+۱)}=-\frac{۳}{۲}$

$\frac{۱۵x^{۲}+۳}{۵x^{۲}+۱}=\frac{۳(۵x^{۲}+۱)}{(۵x^{۲}+۱)}=۳\Rightarrow \frac{-۶x-۳}{۴x+۲}<\frac{۳x+۴}{-۴-۳x}<\frac{۸x^{۲}+۱۶x}{۴x(x+۲)}<\frac{۱۵x^{۲}+۳}{۵x^{۲}+۱}$

کاربرگ ۲۰

۱- ۱) ابتدا هر یک از عبارات را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x-3}{x^2-4}=\frac{(x-3)}{(x-2)(x+2)} \quad , \quad \frac{x+2}{x^2-6x+9}=\frac{(x+2)}{(x-3)^2}$$

حال می‌توان نوشت:

$$\frac{x-3}{x^2-4}\times\frac{x+2}{x^2-6x+9}=\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-2)(x-3)^2}=\frac{1}{(x-3)(x+2)}$$

۲) ابتدا هر یک از عبارات را ساده و سپس آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{4m-20n}{2m^2-50n^2}=\frac{4(m-5n)}{2(m-5n)(m+5n)} \quad , \quad \frac{2m^2+7mn-15n^2}{3m+9n}=\frac{(m+5n)(2m-3n)}{3(m+3n)}$$

$$=\frac{4m-20n}{2m^2-50n^2}\times\frac{2m^2+7mn-15n^2}{3m+9n}=\frac{4(m-5n)(m+5n)(2m-3n)}{3\times2(m-5n)(m+5n)(m+3n)}=\frac{2(2m-3n)}{3(m+3n)}$$

۲-

$$۱)\ \frac{4x^2-12x}{x^2+x-12}\div\frac{2}{x+4}=\frac{4x(x-3)}{(x+4)(x-3)}\times\frac{x+4}{2}=2x$$

$$۲)\ \frac{xy-x^2}{4z^2-9x^2}\div\frac{x^3y-x^4}{2z-3x}=\frac{xy-x^2}{(2z-3x)(2z+3x)}\times\frac{2z-3x}{x^2(xy-x^2)}=\frac{1}{(2z+3x)x^2}=\frac{1}{2zx^2+3x^3}$$

۳-

$$۱)\ \frac{x+5}{x-3}\times\frac{x^2-4x+3}{x^2-25}=\frac{\cancel{x+5}}{\cancel{x-3}}\times\frac{(x-1)(\cancel{x-3})}{(x-5)(\cancel{x+5})}=\frac{x-1}{x-5}$$

$$(\frac{\cancel{3x+4}}{\cancel{x-1}}\times\frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{2x(\cancel{3x+4})}\div2\Rightarrow\frac{x+1}{2x}\times\frac{1}{2}=\frac{x+1}{4x}$$

۴-

$$x^2+6x+9\div\frac{x+3}{x}=(x+3)^{\cancel{2}}\times\frac{x}{\cancel{x+3}}=x(x+3)=x^2+3x$$

۵-

$$\bigcirc \times \frac{x^{۲}+۴x+۳}{x+۱}=۵ \Rightarrow \bigcirc \times \frac{\cancel{(x+۱)}(x+۳)}{\cancel{x+۱}}=۵ \Rightarrow \bigcirc = \frac{۵}{x+۳}$$

۶- به کمک قاعدهٔ جمع و تفریق عبارت‌های گویا با مخرج یکسان هر عبارت را ساده می‌کنیم.

۱) $$\frac{۲x-۵}{x-۲}-\frac{x-۳}{x-۲}=\frac{(۲x-۵)-(x-۳)}{x-۲}=\frac{x-۲}{x-۲}=۱$$

۲) $$\frac{x}{x^{۲}-۱}+\frac{۱}{x^{۲}-۱}=\frac{x+۱}{x^{۲}-۱}=\frac{x+۱}{(x+۱)(x-۱)}=\frac{۱}{x-۱}$$

۳) $$\frac{x^{۲}-۲۶}{x-۵}-\frac{۲x+۴}{x-۵}+\frac{۱۰+x}{x-۵}=\frac{(x^{۲}-۲۶)-(۲x+۴)+(۱۰+x)}{x-۵}=\frac{x^{۲}-x-۲۰}{x-۵}$$

$$=\frac{(x-۵)(x+۴)}{x-۵}=x+۴$$

۷- ابتدا هر یک از عبارت‌های گویای A و B را ساده می‌کنیم.

$$A=\frac{x^{۲}-۵x+۴}{x^{۲}-۶x+۵}=\frac{(x-۱)(x-۴)}{(x-۱)(x-۵)}=\frac{x-۴}{x-۵}$$

$$B=\frac{۲x+۱۰}{x^{۲}-۲۵}=\frac{۲(x+۵)}{(x+۵)(x-۵)}=\frac{۲}{x-۵}$$

اکنون حاصل $۲A-B$ را حساب می‌کنیم.

$$۲A-B=۲(\frac{x-۴}{x-۵})-\frac{۲}{x-۵}=\frac{۲x-۸}{x-۵}-\frac{۲}{x-۵}=\frac{۲x-۸-۲}{x-۵}=\frac{۲x-۱۰}{x-۵}=\frac{۲(x-۵)}{x-۵}=۲$$

۸- ۱) مخرج اولین کسر به‌صورت $(t-۲)(t+۶)$ و مخرج دومین کسر به‌صورت $۲(t+۶)$ تجزیه می‌شود.

پس مخرج مشترک دو کسر، به‌صورت $۲(t-۲)(t+۶)$ است.

$$\frac{۳t-۲}{t^{۲}+۴t-۱۲}-\frac{۵}{۲t+۱۲}=\frac{۳t-۲}{(t-۲)(t+۶)}-\frac{۵}{۲(t+۶)}=\frac{۲(۳t-۲)}{۲(t-۲)(t+۶)}-\frac{۵(t-۲)}{۲(t-۲)(t+۶)}$$

$$=\frac{(۶t-۴)-(۵t-۱۰)}{۲(t-۲)(t+۶)}=\frac{t+۶}{۲(t-۲)(t+۶)}=\frac{۱}{۲(t-۲)}$$

۲) مخرج اولین کسر به‌صورت $(x+۱)(x+۳)$ و مخرج دومین کسر به‌صورت $(x+۲)(x+۳)$ تجزیه می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$\text{مخرج مشترک}=(x+۲)(x+۱)(x+۳)$$

حال عبارت موردنظر را به‌صورت زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$\frac{۲x-۲}{x^۲+۴x+۳}-\frac{x-۱}{x^۲+۵x+۶}=\frac{۲(x-۱)}{(x+۱)(x+۳)}-\frac{(x-۱)}{(x+۲)(x+۳)}$$

$$=\frac{۲(x-۱)(x+۲)}{(x+۲)(x+۱)(x+۳)}-\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x+۲)(x+۱)(x+۳)}=\frac{۲(x^۲+x-۲)-(x^۲-۱)}{(x+۱)(x+۲)(x+۳)}$$

$$=\frac{x^۲+۲x-۳}{(x+۱)(x+۲)(x+۳)}=\frac{(x-۱)(x+۳)}{(x+۱)(x+۲)(x+۳)}=\frac{x-۱}{(x+۱)(x+۲)}$$

۹- برای محاسبهٔ محیط این متوازی‌الاضلاع کافی است عبارت زیر را ساده کنید.

$$\text{محیط متوازی‌الاضلاع}=۲(\frac{۵}{x-۳}+\frac{۲x}{x^۲-۲x-۳})$$

مخرج کسر سمت راست به‌صورت $(x+۱)(x-۳)$ ساده می‌شود. بنابراین مخرج مشترک $(x+۱)(x-۳)$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\text{محیط متوازی‌الاضلاع}=۲(\frac{۵(x+۱)}{(x+۱)(x-۳)}+\frac{۲x}{(x+۱)(x-۳)})=۲(\frac{۷x+۵}{(x+۱)(x-۳)})=\frac{۱۴x+۱۰}{(x+۱)(x-۳)}$$

۱۰- ۱) مخرج کسرها به ترتیب به‌صورت $x(۳x-۲)$ و $۳x-۲$ و $x^۲$ تجزیه می‌شوند. بنابراین مخرج مشترک برابر با $x^۲(۳x-۲)$ خواهد بود. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۶}{x(۳x-۲)}+\frac{۵}{۳x-۲}-\frac{۲}{x^۲}=\frac{۶x}{x^۲(۳x-۲)}+\frac{۵x^۲}{x^۲(۳x-۲)}-\frac{۲(۳x-۲)}{x^۲(۳x-۲)}=\frac{۶x+۵x^۲-۶x+۴}{x^۲(۳x-۲)}$$

$$=\frac{۵x^۲+۴}{x^۲(۳x-۲)}$$

۲) مخرج کسرها به‌صورت $(x+۳)^۲$ ، $(x+۳)(x-۳)$ و $x-۳$ تجزیه می‌شوند بنابراینی مخرج مشترک برابر با $(x+۳)^۲(x-۳)$ خواهد بود. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۲x+۵}{(x+۳)^۲}+\frac{x}{(x-۳)(x+۳)}+\frac{۱}{x-۳}=\frac{(۲x+۵)(x-۳)}{(x+۳)^۲(x-۳)}+\frac{x(x+۳)}{(x+۳)^۲(x-۳)}+\frac{(x+۳)^۲}{(x+۳)^۲(x-۳)}$$

$$=\frac{(۲x^۲-x-۱۵)+(x^۲+۳x)+(x^۲+۶x+۹)}{(x+۳)^۲(x-۳)}=\frac{۴x^۲+۸x-۶}{(x+۳)^۲(x-۳)}=\frac{۲(۲x^۲+۴x-۳)}{(x+۳)^۲(x-۳)}$$

۱۱-

$$\bigcirc+\frac{x}{3x-3}=\frac{8-2x}{6x-6}\Rightarrow\bigcirc+\frac{x}{3(x-1)}=\frac{\cancel{2}(4-x)}{\cancel{6}_{3}(x-1)}\Rightarrow\bigcirc=\frac{4-x}{3x-3}-\frac{x}{3x-3}\Rightarrow\bigcirc=\frac{4-2x}{3x-3}$$

۱۲- ۱) صورت و مخرج را در $(n-1)(n+1)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\frac{m^2-n^2}{n-1}}{\frac{m^2+n^2}{n+1}}=\frac{(n-1)(n+1)(\frac{m^2-n^2}{n-1})}{(n-1)(n+1)(\frac{m^2+n^2}{n+1})}=\frac{(n+1)(m^2-n^2)}{(n-1)(m^2+n^2)}=\frac{nm^2-n^3+m^2-n^2}{nm^2+n^3-m^2-n^2}$$

۲)

$$\begin{cases}\frac{x}{x-1}+1=\frac{x+x-1}{x-1}=\frac{2x-1}{x-1}\\ \frac{x+1}{x}-2=\frac{x+1-2x}{x}=\frac{1-x}{x}\end{cases}\Rightarrow\frac{\frac{x}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x}-2}=\frac{\frac{2x-1}{x-1}}{\frac{1-x}{x}}=\frac{(2x-1)(x)}{(x-1)(1-x)}=\frac{2x^2-x}{-(x-1)^2}$$

کاربرگ ۲۱

۱- به کمک قوانین تقسیم توان‌دار می‌توان نوشت:

۱) $\frac{۴۸x^{۳}y^{۲}}{۹۰x^{۵}y}=\frac{۴۸}{۹۰}\times\frac{x^{۳}}{x^{۵}}\times\frac{y^{۲}}{y}=\frac{۲۴}{۴۵}x^{۳-۵}y^{۲-۱}=\frac{۸}{۱۵}x^{-۲}y$

۲) $۷۰x^{۳}y^{۷}z^{۵}\div ۸xy^{۲}=\frac{۷۰x^{۳}y^{۷}z^{۵}}{۸xy^{۲}}=\frac{۷۰}{۸}\times\frac{x^{۳}}{x}\times\frac{y^{۷}}{y^{۲}}\times z^{۵}=\frac{۳۵}{۴}x^{۲}y^{۵}z^{۵}$

۲- با توجه به این‌که هر دو عبارت داده شده، تقسیم چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای است، داریم:

۱) $\frac{ab^{۳}-۳a^{۲}b+۶b}{۵a^{۲}b^{۲}}=\frac{ab^{۳}}{۵a^{۲}b^{۲}}-\frac{۳a^{۲}b}{۵a^{۲}b^{۲}}+\frac{۶b}{۵a^{۲}b^{۲}}=\frac{b}{۵a}-\frac{۳}{۵b}+\frac{۶}{۵a^{۲}b}$

۲) $\frac{-m^{۳}n^{۲}+۱۰mn^{۲}-۲m^{-۱}}{۵mn^{۲}}=\frac{-m^{۳}n^{۲}}{۵mn^{۲}}+\frac{۱۰mn^{۲}}{۵mn^{۲}}-\frac{۲m^{-۱}}{۵mn^{۲}}=-\frac{m^{۳}n^{۲}}{۵mn^{۲}}+\frac{۱۰mn^{۲}}{۵mn^{۲}}-\frac{۲}{۵mn^{۲}\times m}$

$=-\frac{m^{۲}}{۵}+۲-\frac{۲}{۵m^{۲}n^{۲}}$

۳-

$x^{۵}+۵$ | $x^{۲}-۱$
$-x^{۵}+x^{۳}$ | $x^{۳}+x$
$x^{۳}+۵$
$-x^{۳}+x$
$x+۵$

$۲x^{۳}-x^{۲}+x+۴$ | $x+۱$
$-۲x^{۳}-۲x^{۲}$ | $۲x^{۲}-۳x+۴$
$-۳x^{۲}+x+۴$
$+۳x^{۲}+۳x$
$۴x+۴$
$-۴x-۴$
۰

$۳x^{۳}-۱$ | $-x^{۲}+۱$
$-۳x^{۳}+۳x$ | $-۳x$
$۳x-۱$

۴- طول مستطیل را به کمک تقسیم مساحت مستطیل بر عرض مستطیل به دست می‌آوریم:

$۲x^{۳}+x^{۲}+x-۴$ | $x-۱$
$-۲x^{۳}+۲x^{۲}$ | $۲x^{۲}+۳x+۴\rightarrow$ خارج قسمت
$۳x^{۲}+x-۴$
$-۳x^{۲}+۳x$
$۴x-۴$
$-۴x+۴$
۰

۵-

$$\frac{x^۳-x^۲-۶x}{x^۲+۲x}=\frac{\cancel{x}(x^۲-x-۶)}{\cancel{x}(x+۲)}$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^۲}-x-۶ & x+۲ \\ \hline -\cancel{x^۲}-۲x & x-۳ \\ \hline -۳x-۶ & \\ +۳x+۶ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

۶- کافی است طبق قاعدهٔ تقسیم، چندجمله‌ای $۳x^۳+۴x+m$ را بر $x+۲$ تقسیم کنیم، پس باقی‌مانده را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{r|l} ۳x^۳+۴x+m & x+۲ \\ \hline -۳x^۳+۶x^۲ & ۳x^۲-۶x+۱۶ \\ \hline -۶x^۲+۴x+m & \\ -۶x^۲-۱۲x & \\ \hline ۱۶x+m & \\ -۱۶x+۳۲ & \\ \hline m-۳۲ \rightarrow \text{باقی‌مانده} & \end{array}$$

$$\Rightarrow m-۳۲=۰ \Rightarrow m=۳۲$$

۷- ابتدا به محاسبهٔ تقسیم دو چندجمله‌ای می‌پردازیم:

$$\begin{array}{r|l} x^۵+۶x^۳+۱۱x+۷ & x^۲+۴ \\ \hline -x^۵+۴x^۳ & x^۳+۲x \rightarrow \text{خارج‌قسمت} \\ \hline ۲x^۳+۱۱x+۷ & \\ -۲x^۳+۸x & \\ \hline ۳x+۷ \rightarrow \text{باقی‌مانده} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۵+۶x^۳+۱۱x+۷}{x^۲+۴}=\frac{(x^۲+۴)(x^۳+۲x)+۳x+۷}{x^۲+۴}=(x^۳+۲x)+\frac{۳x+۷}{x^۲+۴}$$

۸- برای حل این سوال کافی است رابطهٔ تقسیم را بنویسیم و هر یک از اجزای آن را با توجه به اطلاعات مسئله جایگذاری کنیم و عبارت‌های به دست آمده را ساده کنیم تا a به دست بیاید.

مقسوم = مقسوم‌علیه × خارج‌قسمت + باقی‌مانده

$$x^۲-۶x+a=(x-۲)\times(x-۴)+(-۱)$$

$$\Rightarrow x^۲-۶x+a=x^۲-۶x+۸+(-۱) \Rightarrow x^۲-۶x+a=x^۲-۶x+۷ \Rightarrow a=۷$$

کاربرگ ۲۲

۱- ۱) با توجه به فرمول‌های حجم و مساحت کره داریم:

$$\text{حجم} = V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳} \times \pi \times ۳^۳ = ۴ \times \pi \times ۹ = ۳۶\pi$$

$$\text{مساحت} = ۴\pi r^۲ = ۴ \times \pi \times ۳^۲ = ۳۶\pi$$

۲) چون مساحت برابر π است اگر فرض کنیم شعاع کره برابر r باشد، آن‌گاه داریم:

$$۴\pi r^۲ = \pi \Rightarrow ۴r^۲ = ۱ \Rightarrow r^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow r = \frac{۱}{۲} \Rightarrow r = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳} \times \pi \times \frac{۱}{۸} = \frac{\pi}{۶}$$

۳) فرض کنید شعاع کره برابر r است. در این صورت داریم:

$$\frac{۴}{۳}\pi r^۳ = ۴\sqrt{۳}\pi \Rightarrow \frac{r^۳}{۳} = \sqrt{۳} \Rightarrow r^۳ = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow r^۳ = \sqrt{۲۷} \Rightarrow r^۳ = (\sqrt{۳})^۳$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{۳} \Rightarrow S = ۴\pi r^۲ = ۴\pi(\sqrt{۳})^۲ = ۴\pi \times ۳ = ۱۲\pi$$

۲-

۱) $(\frac{۲}{۳} \times \pi \times ۱^۳) + (۱ \times ۱ \times \pi \times ۲) = \frac{۲}{۳}\pi + ۲\pi = \frac{۸}{۳}\pi$

۲) $(۲ \times \pi \times ۱^۲) + (۲ \times \pi \times ۲) + (۱ \times \pi) = ۷\pi$

۳) $۷ \times ۳ = ۲۱ \Rightarrow ۲۱ \times ۱۵۰ = ۳۱۵۰$ گرم

$۳۱۵۰ \div ۱۰۰۰ = ۳/۱۵۰$ کیلوگرم

۳-

حجم کاسه : $\frac{۲}{۳} \times \pi \times ۴۰^۳ \Rightarrow \frac{۲}{۳} \times \pi \times ۴۰^۳ = ۴۰ \times ۴۰ \times \pi \times$ ارتفاع

$\frac{۲}{۳} \times ۴۰ = \text{ارتفاع} \Rightarrow \text{ارتفاع} = \frac{۸۰}{۳}$ سانتی‌متر

۴-

$$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳} \times \pi \times ۳^۳ = ۳۶\pi = ۳۶ \times ۳ = ۱۰۸$$

$$\text{حجم استوانه} = ۳ \times ۳ \times \pi \times ۶ = ۵۴\pi = ۵۴ \times ۳ = ۱۶۲$$

حجم فضای بین کره و استوانه $= ۱۶۲ - ۱۰۸ = ۵۴$

۵- برای به دست آوردن حجم خالی مکعب مستطیل باید حجم سه توپ تنیس را محاسبه کرده و از حجم مکعب مستطیل کم کنیم تا حجم فضای خالی آن به دست بیاید. پس:

$$\text{توپ تنیس } V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \xrightarrow{R=۳cm} V = \frac{۴}{۳} \times ۳ \times ۳^۳ = ۴ \times ۲۷ = ۱۰۸cm^۲$$

بنابراین حجم ۳ توپ تنیس برابر با $۳ \times ۱۰۸ = ۳۲۴cm^۳$ است. حالا باید حجم مکعب مستطیل را محاسبه کنیم.

$$\text{حجم مکعب مستطیل} = \text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = ۶ \times ۶ \times ۱۸ = ۶۴۸cm^۳$$

پس حجم فضای خالی مکعب مستطیل برابر است با:

$$\text{فضای خالی } V = ۶۴۸ - ۳۲۴ = ۳۲۴cm^۳$$

۶-

$$\frac{۴}{۳}\pi r^۳ = ۴\pi r^۲ \xrightarrow{\div \pi r^۲} \frac{r}{۳} = ۱ \Rightarrow r = ۳$$

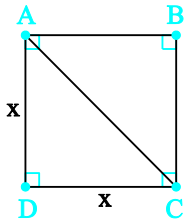
۷- ۱) هرم مربع‌القاعده

۲) ۵ وجه دارد که ۴ تا از آن‌ها جانبی و یکی قاعده می‌باشد.

۳) قاعده آن مربع و وجوه جانبی آن به شکل مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد.

۴) OH ارتفاع هرم است و نقطهٔ O رأس هرم می‌باشد. هرم مربع‌القاعده هشت یال دارد.

۸- ۱) چون قطر قاعده برابر $۶\sqrt{۲}$ است، طول ضلع‌های قاعده مطابق شکل زیر برابر است با:



$$x^۲ + x^۲ = (۶\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow ۲x^۲ = ۳۶ \times ۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳} \text{ قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$= \frac{۱}{۳} \times ۶ \times ۶ \times ۴ = ۴۸$$

۲) دقت کنید که مثلث قاعده، قائم‌الزاویه است. چون رابطهٔ فیثاغورس $۲۵^۲ = ۲۴^۲ + ۷^۲$ برای اضلاع آن برقرار است. پس:

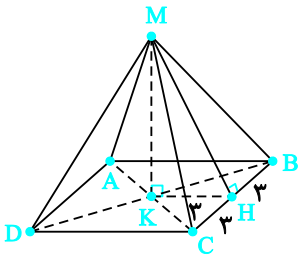


$$V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳} \times S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۲۴ \times ۷}{۲} \times ۹ = ۲۵۲$$

۳) مساحت شش ضلعی منتظم به طول ضلع a از رابطهٔ $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ به دست می‌آید. پس داریم:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳} \times S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times ۳^۲ \times ۸ = ۳۶\sqrt{۳}$$

۹- با توجه به شکل مقابل ابتدا طول MH را محاسبه کرده و سپس به کمک آن اندازهٔ ارتفاع هرم را به دست می‌آوریم:



$$\overset{\Delta}{MHB}: MH^۲ + HB^۲ = MB^۲ \Rightarrow MH^۲ + ۳^۲ = ۵^۲ \Rightarrow MH^۲ = ۲۵ - ۹$$

$$\Rightarrow MH^۲ = ۱۶ \Rightarrow MH = ۴$$

حال با توجه به این‌که مثلث MKH هم قائم‌الزاویه است. داریم:

$$MK^۲ + KH^۲ = MH^۲ \Rightarrow MK^۲ + ۳^۲ = ۴^۲ \Rightarrow MK^۲ + ۹ = ۱۶ \Rightarrow MK^۲ = ۷ \Rightarrow MK = \sqrt{۷}$$

پس طول ارتفاع هرم برابر $\sqrt{۷}$ و در نتیجه حجم آن برابر است با:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳} \times (۶ \times ۶) \times \sqrt{۷} = ۱۲\sqrt{۷}$$

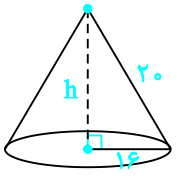
۱۰- ۱) حجم مخروط از رابطهٔ $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ به دست می‌آید. پس داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi \times ۲^۲ \times ۳ \Rightarrow V = ۴\pi$$

۲) فرض کنید ارتفاع مخروط برابر h باشد. در این صورت داریم:

$$V = ۵۰\pi \Rightarrow \frac{۱}{۳}\pi \times (۵)^۲ \times h = ۵۰\pi \Rightarrow \frac{۲۵h}{۳} = ۵۰ \Rightarrow h = \frac{۵۰ \times ۳}{۲۵} \Rightarrow h = ۶$$

۱۱-



$$h^۲ + ۱۶^۲ = ۲۰^۲ \Rightarrow h^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow h = ۱۲$$

$$\text{حجم} = \frac{۱}{۳} \times ۱۶ \times ۱۶ \times \pi \times ۴ = ۱۰۲۴\pi$$

۱۲-

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳} \times ۶ \times ۶ \times \pi \times ۵ \Rightarrow ۵ \times ۶ \times ۶ \times \pi = ۱۰ \times ۱۰ \times \pi \times h$$

$$\Rightarrow h = \frac{۵ \times ۶ \times ۶}{۱۰ \times ۱۰} = \frac{۱۸}{۱۰} = ۱/۸$$

کاربرگ ۲۳

۱-

۱) حجم $= b \times b \times \pi \times ۲b = ۲b^{۳}\pi$

مساحت جانبی $= ۲b\pi \times ۲b = ۴b^{۲}\pi$

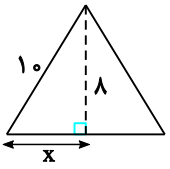
مساحت کل $= ۴b^{۲}\pi + b^{۲}\pi + b^{۲}\pi = ۶b^{۲}\pi$

۲) حجم $= b^{۳}$ ، مساحت کل $= ۶b^{۲}$

۳) حجم $= \frac{۴}{۳}\pi b^{۳}$ ، مساحت $= ۴\pi b^{۲}$

۲-

$x^{۲} = ۱۰۰ - ۶۴ = ۳۶ \Rightarrow x = ۶$



مساحت مربع کف: $۱۲ \times ۱۲ = ۱۴۴$

مساحت ۴ مثلث: $۴ \times \frac{۱۲ \times ۸}{۲} = ۹۶$

$\Rightarrow ۹۶ + ۱۴۴ = ۲۴۰$

۳-

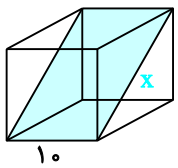
حجم $= \frac{۱}{۳} \times ۸ \times ۱۰ \times ۱۲ = ۳۲۰ cm^{۳}$

مساحت کل $= ۲ \times \frac{(۱۰ \times ۴\sqrt{۱۰})}{۲} + ۲ \times (\frac{۸ \times ۱۳}{۲}) + ۸ \times ۱۲ = ۴۰\sqrt{۱۰} + ۱۰۴ + ۹۶ = ۴\sqrt{۱۰} + ۲۰۰$

۴- $\frac{۱}{۸}$ از کره برداشته شده است. پس:

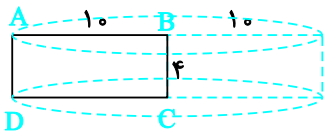
$\frac{۱}{۸} \times \frac{۴}{۳}\pi \times ۱۶^{۳} = \frac{۱۰۲۴\pi}{۳}$

۵- سطح بریده شده مستطیل است که عرض آن ضلع مکعب یعنی ۱۰ و طول آن قطر وجه یعنی $۱۰\sqrt{۲}$ می‌باشد.



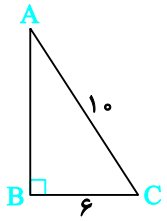
$(\text{طول})^{۲} = ۱۰^{۲} + ۱۰^{۲} \Rightarrow \text{طول} = ۱۰\sqrt{۲}$

۶- ۱) از دوران شکل حول BC استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۱۰ و ارتفاع ۴ تولید می‌شود. پس داریم:



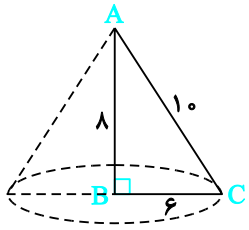
$$V = \pi r^2 h = \pi(۱۰)^2 \times ۴ = ۴۰۰\pi$$

۲) ابتدا توجه کنید که طول AB به کمک رابطهٔ فیثاغورس برابر است با:



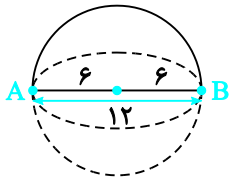
$$AB^2 = BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB^2 + ۶^2 = ۱۰^2$$
$$\Rightarrow AB^2 = ۶۴ \Rightarrow AB = ۸$$

حال با توجه به این‌که $AB = ۸$ ، می‌فهمیم با دوران $\overset{\Delta}{ABC}$ حول AB مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۶ و ارتفاع ۸ تولید می‌شود. پس داریم:



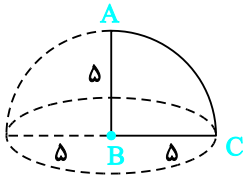
$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^2 h = \frac{۱}{۳}\pi(۶)^2 \times ۸ = ۱۲\pi \times ۸ = ۹۶\pi$$

۳) از دوران شکل حول AB ، یک کره به قطر ۱۲ تولید می‌شود. پس داریم:



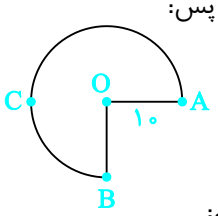
$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^3 = \frac{۴}{۳}\pi(۶)^3 = \frac{۴}{۳}\pi \times ۲۱۶ = ۲۸۸\pi$$

۴) از دوران شکل حول AB یک نیم‌کره به شعاع ۵ تولید می‌شود پس داریم:



$$V = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳}\pi r^3 = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳}\pi(۵)^3 = \frac{۲}{۳}\pi \times ۱۲۵ = \frac{۲۵۰\pi}{۳}$$

۷- ۱) می‌دانیم طول هر کمان برابر محیط قاعدهٔ مخروطی است که آن کمان تولید می‌کند پس:

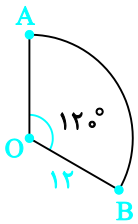


$$\text{طول کمان } ACB = \frac{۳}{۴} \times (۲ \times \pi \times ۱۰) = \frac{۳}{۴} \times ۲۰\pi = ۱۵\pi$$

حال اگر فرض کنیم شعاع قاعدهٔ مخروط تولیدی برابر r است. آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$۲\pi r = ۱۵\pi \Rightarrow ۲r = ۱۵ \Rightarrow r = \frac{۱۵}{۲} \Rightarrow r = ۷/۵$$

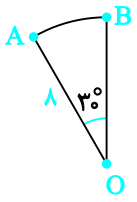
۲)



$$\text{طول کمان } AB = \frac{۱۲۰}{۳۶۰} \times ۲\pi \times ۱۲ = \frac{۱}{۳} \times ۲۴\pi = ۸\pi$$

$$\Rightarrow \text{محیط قاعده مخروط با شعاع } r = ۲\pi r = ۸\pi \Rightarrow ۲r = ۸ \xrightarrow{\div ۲} r = ۴$$

۳)



$$\text{طول کمان } AB = \frac{۳۰}{۳۶۰} \times ۲\pi \times ۸ = \frac{۱}{۱۲} \times ۱۶\pi = \frac{۴\pi}{۳}$$

$$\text{محیط قاعدهٔ مخروط با شعاع } r = ۲\pi r = \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow r = \frac{۲}{۳} \Rightarrow$$

۸- دو مخروط ایجاد می‌شود که هر دو شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ دارند. پس داریم:

$$۲ \times \frac{۱}{۳} \times ۳ \times ۳ \times \pi \times ۴ = ۲۴\pi$$

آزمون ۱ ترم دوم

۱-

الف) نادرست　　ب) درست　　ج) درست　　د) نادرست

۲-

الف) حجم　　ب) ۵　　ج) $۱/۵۰۲\times۱۰^{۳}$　　د) ۲

۳-

الف) گزینهٔ ۳　　ب) گزینهٔ ۱　　ج) گزینهٔ ۳　　د) گزینهٔ ۲

۴-

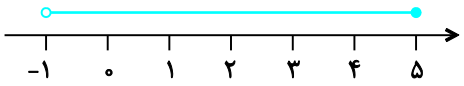
$B-A=\{۱,۲,۳\}$

$n(A)=۴$

$A\cap B=\{۴\}$

۵- الف) $۲,۴,۶ \Rightarrow$ احتمال $=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$　　ب) $۵,۶ \Rightarrow$ احتمال $=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

۶- الف)



ب) $|(۲-\sqrt{۵})|=-۲+\sqrt{۵}$

۷-

$$\begin{cases}\hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \\ \overline{OA}=\overline{OB} \\ \hat{A}=\hat{B}=۹۰^\circ\end{cases}$$ متقابل به رأس

$\xrightarrow[\text{زض ز}]{\text{ناب ه حالت}} \overset{\Delta}{A}DO\cong\overset{\Delta}{B}CO \Rightarrow \overline{AD}=\overline{BC}$

۸-

الف) $(\frac{۲}{۳})^{-۳}\times۱۲^{-۳}=(\frac{۳}{۲})^{۳}\times(\frac{۱}{۱۲})^{۳}=(\frac{۳\times۱}{۲\times۱۲})^{۳}=(\frac{۱}{۸})^{۳}=۸^{-۳}$

ب) $\sqrt{۸}=\sqrt{۴\times۲}=۲\sqrt{۲}$, $\sqrt{۱۲}=\sqrt{۴\times۳}=۲\sqrt{۳}$

$\Rightarrow\frac{\sqrt{۸}\times\sqrt{۱۲}}{\sqrt{۶}}=\frac{۲\sqrt{۲}\times۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}}=۴$

۹- الف) اتحاد مزدوج ، $x^{۲}-\frac{۱}{۲۵}$

$$(y+۴)(y+۳)=y^{۲}+(۴+۳)y+(۴\times ۳)y=y^{۲}+۷y+۱۲$$

ب)

$x^{۲}-۱۲x+۳۶=(x-۶)^{۲}$ اتحاد مربع دوجمله‌ای

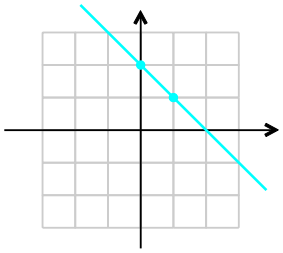
۱۰-

$$۲x+۳<-۵\Rightarrow ۲x<-۵-۳\Rightarrow ۲x<-۸\Rightarrow x<-۴$$

۱۱- الف)

x	۰	۱
y	۲	۱

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$$



ب)

$$y=۴x-۱\xrightarrow{x=۲}y=۴\times ۲-۱=۷\Rightarrow\begin{bmatrix}۲\\۷\end{bmatrix}$$

ج)

$$y=ax+b\Rightarrow y=۲x+b\Rightarrow ۳=۲\times ۲+b\Rightarrow ۳=۴+b\xrightarrow{b=-۱}y=۲x-۱$$

۱۲-

$$\begin{cases}۲x-y=۳\\x+۲y=۴\end{cases}\Rightarrow\times(-۲)\begin{cases}۲x-y=۳\\x+۲y=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{۲x}-y=۳\\\cancel{-۲x}-۴y=-۸\end{cases}$$

$$-۵y=-۵\Rightarrow y=۱$$

$$۲x-y=۳\xrightarrow{y=۱}۲x-۱=۳\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲$$

۱۳- الف) $\frac{۳-x^{۲}}{۲+x}$, $\frac{۱}{x}$

ب) به ازای همهٔ اعداد حقیقی به جز ۱- و ۲:

$$(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}(x+۱)=۰\Rightarrow x=-۱\\(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲\end{cases}$$

ج)

$$\frac{x+2}{x-3} \div \frac{x+2}{x^2-3x} = \frac{x+2}{\cancel{x-3}} \times \frac{x(\cancel{x-3})}{x+2} = x$$

$$\frac{a}{a+1} - 1 = \frac{a}{a+1} - \frac{1\times(a+1)}{1\times(a+1)} = \frac{a-(a+1)}{a+1} = \frac{a-a-1}{a+1} = \frac{-1}{a+1}$$

۱۴-

$$\begin{array}{r|l} \cancel{3x^2} - 7x - 9 & x-3 \\ \hline -\cancel{3x^2} + 9x & 3x+2 \rightarrow \text{خارج‌قسمت} \\ \hline 2x - 9 & \\ -2x + 6 & \\ \hline -3 \rightarrow \text{باقی‌مانده} & \end{array}$$

۱۵- الف)

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \times 125 \Rightarrow V = \frac{500\pi}{3} cm^3$$

ب) مخروط ، دایره

شعاع $= 12 \div 2 = 6$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 8 = \frac{1}{3}\pi \times 36 \times 8 = 96\pi cm^3$$

آزمون ۲ ترم دوم

۱-

الف) درست　　ب) درست　　ج) نادرست　　د) نادرست

۲-

الف) گزینهٔ ۳　　ب) گزینهٔ ۲　　ج) گزینهٔ ۴

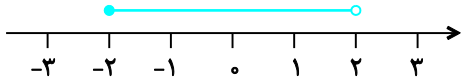
۳-

الف) اعداد حقیقی　　ب) $\frac{۱}{۴}$　　ج) ۵　　د) دایره

۴-

$A \cap B = \{۱, ۷\}$　　$A - B = \{-۳, ۸\}$　　$n(A \cup B) = ۵$

۵-



۶- الف) به‌طور مثال:

عدد گنگ $\sqrt{۱۲}$ و عدد گویا $\sqrt{۱۶} = ۴$

ب)

$$\sqrt{(\sqrt{۱۰} - ۳)^۲} = |\sqrt{۱۰} - ۳| = \sqrt{۱۰} - ۳$$

۷- حکم: برابری قطرهای مستطیل

۸-

$$\left.\begin{matrix} AD = AD \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ AB = AC \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{ض ز ض}]{\text{نابه حالت}} \overset{\Delta}{A}BD \cong \overset{\Delta}{A}CD \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

۹- الف)

$$\sqrt{۲۷} + ۴\sqrt{۳} = \sqrt{۹ \times ۳} + ۴\sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳} + ۴\sqrt{۳} = ۷\sqrt{۳}$$

ب)　$۰/۰۰۷۱ = ۷/۱ \times ۱۰^{-۳}$

ج) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

۱۰-

۹- الف) $۴x^{۲}$ ب) $x^{۲}+۸xy+۱۶y^{۲}$

۱۱- $x^{۲}+۵x+۶=(x+۲)(x+۳)$

۱۲-

$۵x-۱۰\geq ۳x+۴\Rightarrow ۵x-۳x\geq ۴+۱۰\Rightarrow ۲x\geq ۱۴\Rightarrow x\geq ۷$ یا $D=\{x\in R\mid x\geq ۷\}$

۱۳-

$$\begin{cases}۲x-y=۳\\ ۵x+۳y=۱۳\end{cases}\Rightarrow\times ۳\begin{cases}۲x-y=۳\\ ۵x+۳y=۱۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۶x-\cancel{۳y}=۹\\ ۵x+\cancel{۳y}=۱۳\end{cases}$$

$$۱۱x=۲۲\Rightarrow x=۲$$

$۲x-y=۳\Rightarrow ۲(۲)-y=۳\Rightarrow ۴-y=۳\Rightarrow y=۱\Rightarrow$ جواب دستگاه: $\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$

۱۴- الف)

$y=۴$

ب)

$۶x+۳y=۱۲\Rightarrow ۳y=-۶x+۱۲\Rightarrow \frac{۳}{۳}y=\frac{-۶x}{۳}+\frac{۱۲}{۳}\Rightarrow y=-۲x+۴$

۴ = عرض از مبدأ و ۲- = شیب

۱۵- الف)

$۵x-۱۰=۰\Rightarrow ۵x=۱۰\Rightarrow x=۲$

ب)

الف) $\frac{۷}{(x+۲)}+\frac{۴}{x}=\frac{۷(x)+۴(x+۲)}{x(x+۲)}=\frac{۷x+۴x+۸}{x(x+۲)}=\frac{۱۱x+۸}{x(x+۲)}$

$$\frac{x^{۲}}{(x-۳)}\times\frac{۲x-۶}{۵x}=\frac{x\times\cancel{x}}{(\cancel{x-۳})}\times\frac{۲(\cancel{x-۳})}{۵\cancel{x}}=\frac{۲x}{۵}$$

۱۶-

$$\begin{array}{r|l} x^{۲}+۵x-۲ & x+۳ \\ \hline -x^{۲}-۳x & x+۲ \\ \hline ۲x-۲ & \\ -۲x-۶ & \\ \hline -۸ & \end{array}$$

خارج‌قسمت $\rightarrow$

باقی‌مانده $\rightarrow$

۱۷-

$$V=\frac{۱}{۳}sh \Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\times(۲\times۴)\times۹=۲۴cm^{۳}$$

۱۸- الف) نیم‌کره

ب)

$$S=۴\pi R^{۲} \Rightarrow S=۴\pi\times۹=۳۶\pi cm^{۲}$$